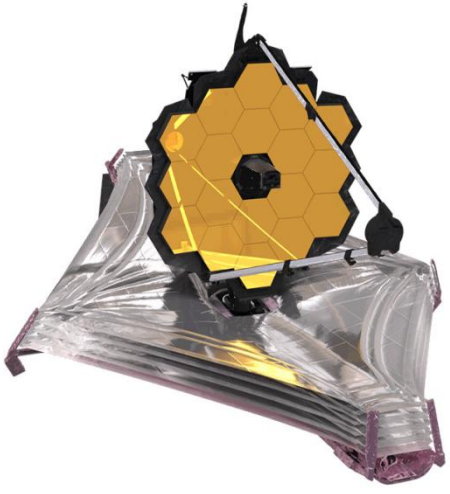
Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)

Задача 1. Телескоп «Джеймс Уэбб»



Главное зеркало крупнейшего космического телескопа «Джеймс Уэбб» является сегментированным и состоит из отдельных зеркал, имеющих форму правильных шестиугольников (см. рисунок).

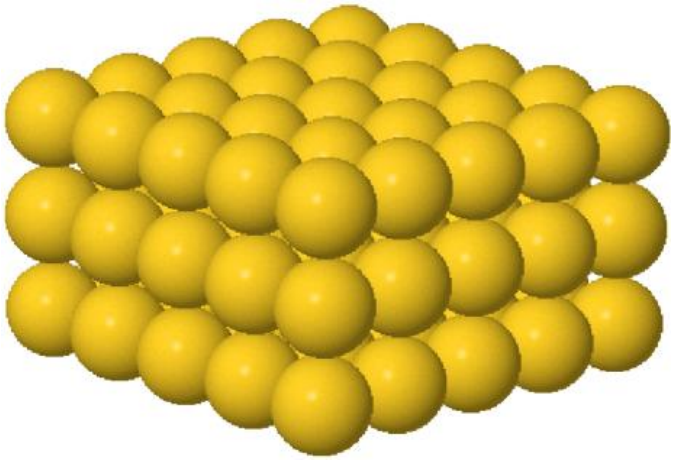
1. Рассчитайте диаметр окружности, описанной вокруг главного зеркала, если длина стороны сегмента составляет 76 см. **(3 балла)**

2. Сколько грамм золота понадобилось для покрытия всей площади главного зеркала, если каждый из его сегментов покрыт слоем металла толщиной 100 нм? **(3 балла)** Оцените диаметр золотого слитка в форме шара, имеющего данную массу. **(2 балла)**

Плотность золота равна 19,25 г/см^3, кривизной зеркал при расчетах пренебречь.

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Задача 2. Призма



1. Рассчитайте число атомов металла в нанокластере, если известно, что

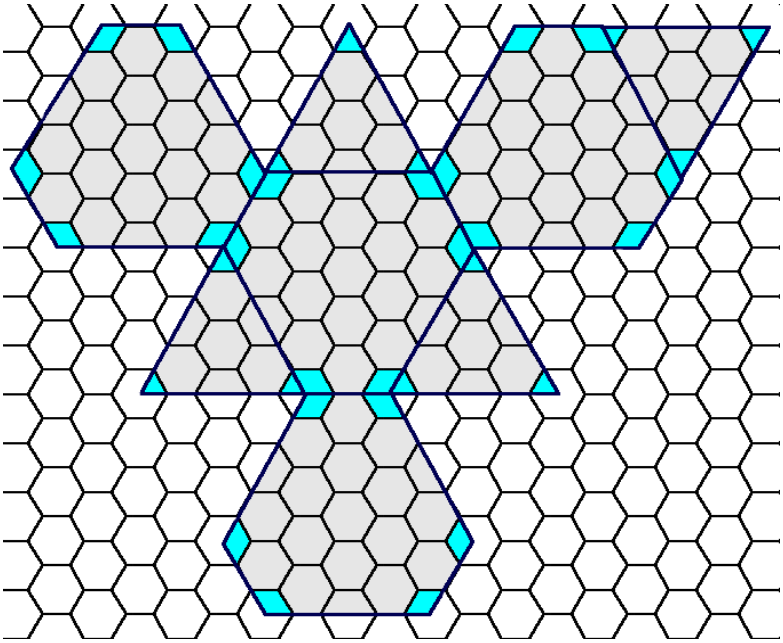
   - атомы в нем упакованы так, как показано на рисунке, в форме правильной четырехугольной призмы;
   - его высота составляет **x** атомов, а длина ребра квадратного основания – **y** атомов;
   - все атомы основания можно без остатка разложить на два квадратных нанокластера, на стороны которых приходится **x** + 1 и 2**x** + 1 атомов металла, соответственно;
   - **y** атомов ребра основания также можно разложить без остатка на два квадратных нанокластера, на стороны которых приходится **a** и **b** атомов металла, соответственно;
   - **a** + **b** = 5.

   (6 баллов)

2. Является ли полученный ответ единственным? Ответ подтвердите расчетом. **(2 балла)**

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Задача 3. Неканонический фуллерен



На рисунке представлена развертка некоторого фуллерена на графеновой плоскости (голубым цветом отмечены области, формирующие пятиугольники этого фуллерена, серым – шестиугольники).

1. Из скольких атомов углерода состоит его каркас? Сколько шестиугольников имеется в его структуре? **(3 балла)**

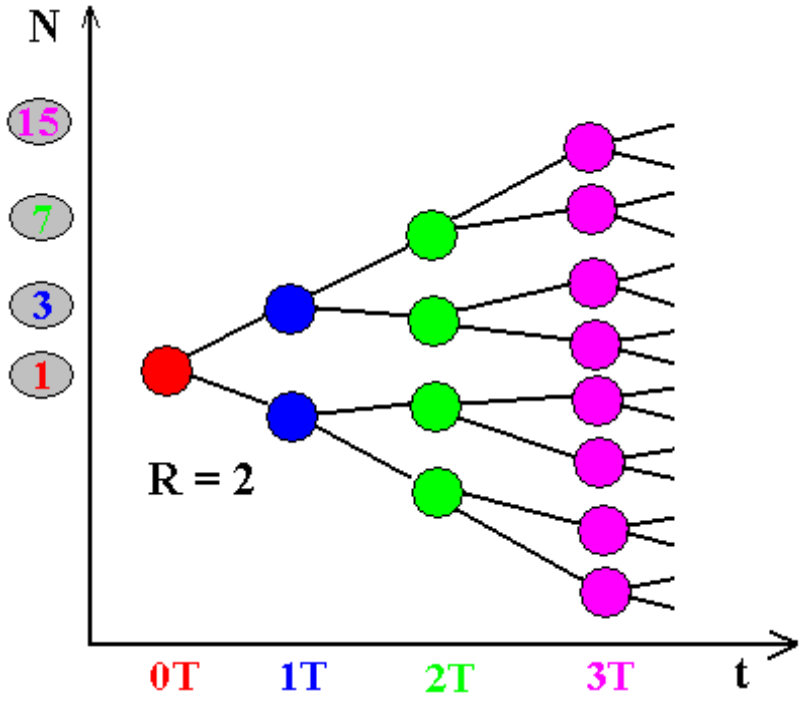
Если представленную на рисунке развертку вырезать по контуру, а затем сложить по выделенным линиям и склеить по линиям разреза, то получится многогранник.

2. В вершинах какого многогранника лежат центры пятиугольников? **(1 балл)**

3. Оцените размер фуллерена как диаметр описанной вокруг него сферы, если длина связи C–C составляет 0,14 нм. Атомы считать точечными, фрагменты графенового листа, формирующие грани развертки – плоскими. **(4 балла)**

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Задача 4. Конкурирующие штаммы



Для упрощенного моделирования эпидемии может быть использована дискретная модель неограниченного роста, основанная на следующих допущениях и упрощениях:

- все время наблюдения за заболеваемостью делится на дискретные отрезки длиной **T** дней, называемые *периодами заражения*;
- в рамках каждого периода заражения *болеющими* и *заразными* являются только те люди, которые были заражены в предыдущем периоде;
- каждый болеющий за время **T** заражает **R** человек, и выздоравливает по окончании этого периода.

В рамках этой модели рассмотрим эпидемию, при которой циркулируют одновременно два штамма вируса, **А** и **Б**. Оцените, через какое время число болеющих штаммом **Б** превысит число болеющих штаммом **А** в 10 раз, если в начальный момент наблюдения соотношение болеющих **А** и **Б** составляет 10 к 1, $\mathbf{R_Б} = 5$, $\mathbf{R_А} = 4$, а **T** = 6 дней?

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Задача 5. В поисках нанотрубки

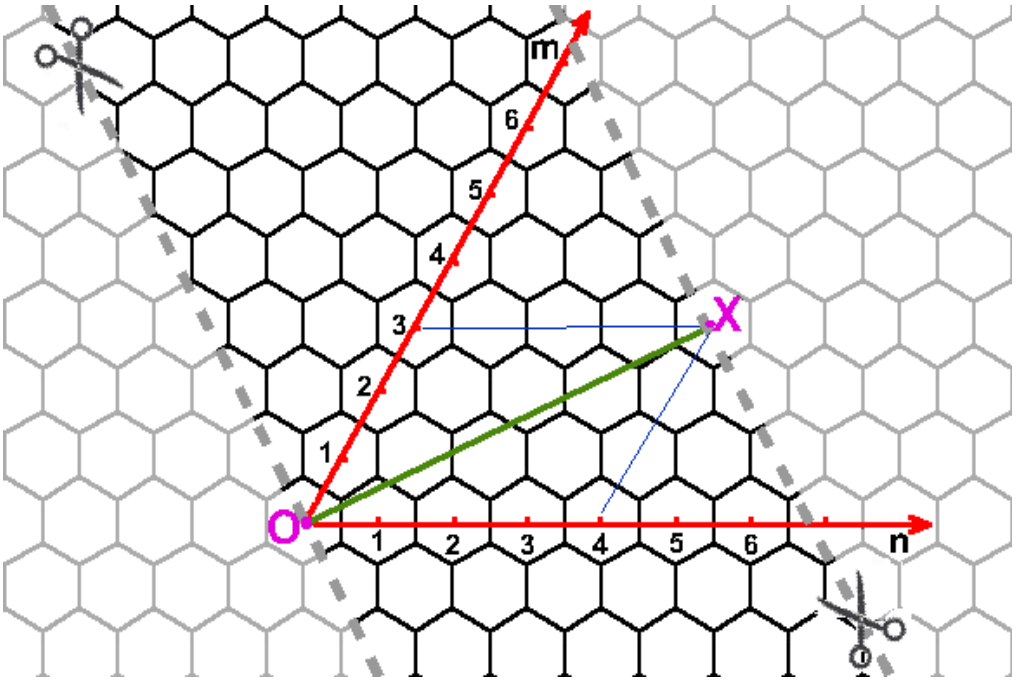


*Рис. 1. Углеродную нанотрубку (УНТ) можно задать одной парой шестиугольников на листе графена, для чего необходимо через центры этих шестиугольников (точки **O** и **X**, взаимное расположение которых в «скошенной» системе координат задается двумя целыми неотрицательными числами, **n** и **m** – индексами хиральности) прочертить линии разреза, перпендикулярные отрезку **OX**, вырезать по ним полоску графена и затем соединить ее края.*
*Здесь приведен пример для «выкройки» трубки с **n** = 4 и **m** = 3.*

Рассмотрим УНТ диаметром от 2 нм до 3 нм.

1. Чему равны минимальное и максимальное значения **n** для этих УНТ? **(3 балла)**

2. На любом языке программирования напишите программу, которая позволит найти общее число УНТ **N**, удовлетворяющее условию. Приведите ее текст. **(4 балла)** Найдите **N** при помощи программы. **(1 балл)**

Считать, что

- длина связи C-C равна 0,14 нм,
- диаметром УНТ является диаметр цилиндра, «склеенного» из ленты шириной **OX**,
- УНТ (**n**, **m**) и УНТ (**m**, **n**) – одна и та же трубка.

Всего – 8 баллов.

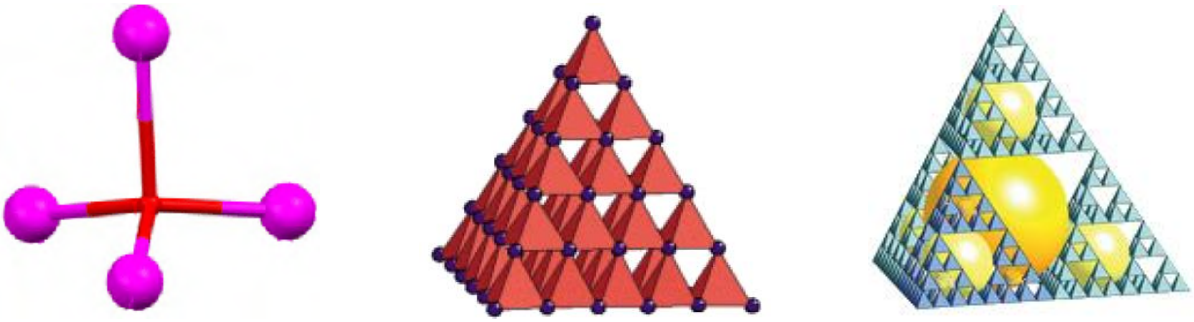
Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Задача 6. Тетрикс

Рис. 1.

Американскими учеными был синтезирован полый кластер $In_xCd_yS_z$, имеющий форму сложенного из тетраэдров MS_4 тетрикса (тетраэдра Серпинского), схематично представленную на рис. 1 (синим цветом обозначены тетраэдры MS_4, для которых M = In, красным – M = Cd).

1. Определите значения **n** и **m** (см. подсказку) для тетрикса, отвечающего приведенному на рисунке кластеру $In_xCd_yS_z$, в котором все атомы Cd заменены на In. **(3 балла)**

2. Установите состав этого кластера исходя из принципа его построения. **(5 баллов)**



а *б* *в*

*Рис. 2. а) Единичный тетраэдр **MS_4**. б) Супертетраэдр **T5**. в) Тетраэдр Серпинского **S3(T2)**. Желтыми сферами отмечены центральная полость кластера, а также еще четыре полости, следующие за ней по размеру.*

Подсказка. Супертетраэдр **Tn** поколения **n** (где **n** – число единичных тетраэдров, приходящееся на ребро **Tn**) – это структура в форме тетраэдра, составленного из единичных тетраэдров (рис. 2а), пересекающихся по вершинам (рис. 2б). Если единичные тетраэдры представлены **MS_4**, то состав такого супертетраэдра будет отвечать формуле $M_{\left(n^3+3n^2+2n\right)/6}S_{\left(n^3+6n^2+11n+6\right)/6}$.

Тетраэдр Серпинского **Sm**(**Tn**) поколения **m** (где **m** – общее число шагов усложнения структуры) – это структура, имеющая иерархическую организацию (рис. 2в): на первом шаге для построения **S1**(**Tn**) четыре **Tn** складываются в форме супертетраэдра второго поколения, на втором шаге, для построения **S2**(**Tn**), уже четыре **S1**(**Tn**) аналогично складываются в форме супертетраэдра второго поколения, и так далее.

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Задача 7. Геокупол

Рассмотрим каркасную структуру, наверняка знакомую Вам по игровой площадке во дворе (см. рис.).

1. Если мысленно «достроить» ее до высокосимметричного выпуклого многогранника **X** так, что вершины, в которых сходится по 5 ребер, будут вершинами икосаэдра, то сколько вершин ребер и граней будет в **X**? **(3 балла)**

2. Если построить новый многогранник **Y** так, чтобы его вершины лежали в центрах треугольников **X**, будет ли **Y** отвечать какому-либо фуллерену? Если да, то какому? Ответ обоснуйте. **(2 балла)**

3. «Удалим» из **X** все вершины, в которых сходится по 5 ребер (получим многогранник **X'**). Можно ли из **X'** дополнительно «изъять» вершины так, чтобы итоговый многогранник **Z** отвечал фуллерену? Свой ответ обоснуйте. **(2 балла)** Во сколько раз число вершин **Z** будет отличатся от числа вершин **Y**? **(1 балл)**

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Задача 8. Лабиринты Нафиона

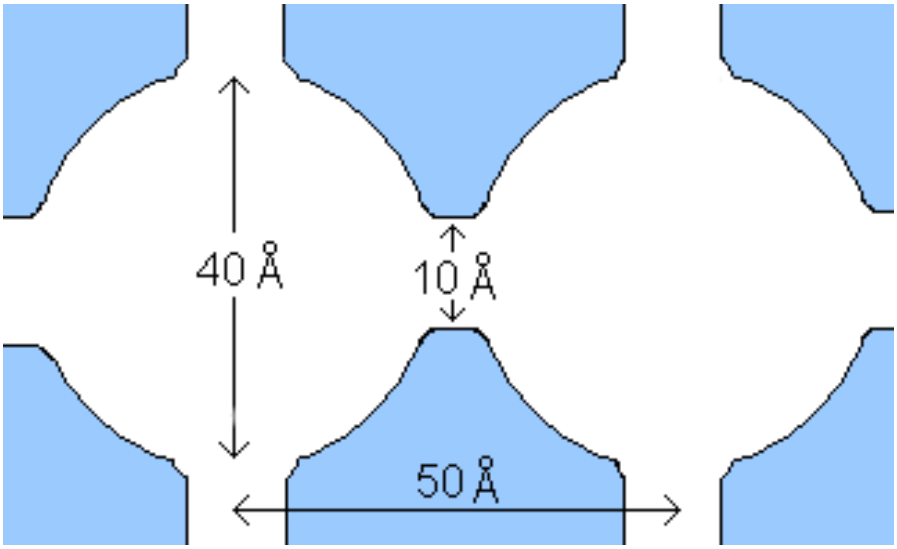


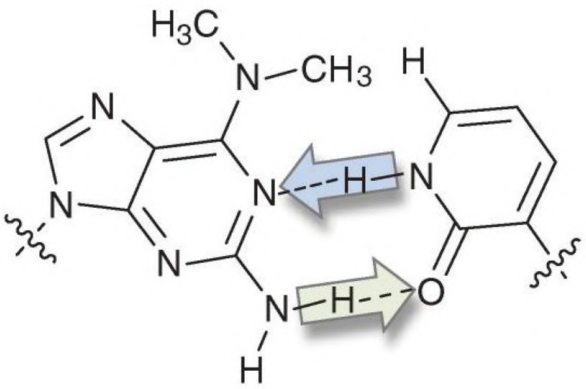
Рис. Модельное представление микроструктуры полимерного электролита Нафиона. Сферические полости диаметром 4 нм образуют периодическую трехмерную сеть: центры этих полостей расположены друг относительно друга как вершины куба с ребром 5 нм; ближайшие друг к другу полости соединены между собой цилиндрическими порами диаметром 1 нм.

Полимерные электролитические мембраны – одна из главных составляющих водородных топливных элементов, экологичных источников тока, уже сегодня питающих не только небольшие зарядные устройства, но и огромные локомотивы, тянущие поезда в разных точках нашей планеты.

На рисунке представлена модель микроструктуры для одного из полимерных электролитов, фторуглеродного Нафиона. Рассчитайте совокупную площадь поверхности полостей и каналов этого полимера (в $м^2$), отнесенную к 1 $см^3$ объема мембраны, изготовленной из него. **(7 баллов)** Сравните полученную площадь с площадью стандартной волейбольной площадки (размер 9 на 18 метров). **(1 балл)**

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Задача 9. Расширенный алфавит



x **y**

Пусть в некотором мире наследственная информация записывается в геноме не при помощи классического алфавита из четырех нуклеотидных букв (**A**, **G**, **T**, **C**), а при помощи расширенного алфавита из шести – **A**, **G**, **T**, **C**, **X** и **Y**. При этом белковые молекулы, как и на Земле, строятся из 20 аминокислот.

1. Какое минимальное число нуклеотидных букв потребуется в кодоне[1] расширенного алфавита, чтобы он мог кодировать все аминокислоты? Как отличается избыточность[2] такой кодировки от избыточности кодировки для классического алфавита? **(4 балла)**

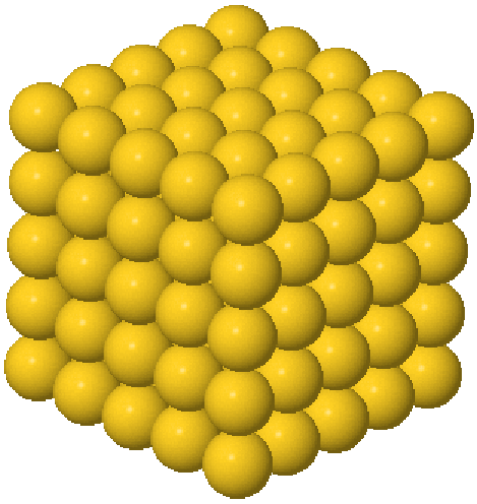
2. Во сколько раз отличается объем информации, которая может быть закодирована в последовательности нуклеотидов фиксированной длины при использовании расширенного и классического алфавита? **(4 балла)**

[1]Кодон – единица генетического кода, кодирует одну аминокислоту.

[2]Избыточностью кодировки считать отношение числа всех вариантов значений одного кодона, к числу вариантов, которые он должен зашифровать.

Всего – 8 баллов

Математика для школьников 10 – 11 классов (отборочный этап)
Задача 10. Кубы и кубики



Если взять металлический нанокластер **А**, имеющий форму куба (пример кубического нанокластера приведен на рисунке), и последовательно дважды удалить все атомы металла, находящиеся на его поверхности, то получится нанокластер **Б**. В тоже время, из атомов, удаленных с поверхности **А**, можно без остатка собрать еще два кубических нанокластера – **В** и **Г**.

Найдите, чему равно число атомов металла, приходящихся на ребро каждого из четырех нанокластеров, а также общее число атомов в исходном кубе, если известно, что

- число атомов, приходящихся на ребро нанокластера **А** (**y**), выражается через число атомов, приходящимся на ребро нанокластера **В** (**x**), как **y** = 2**x** + 10;
- кластер **Г** можно получить, удалив все атомы металла, находящиеся на поверхности нанокластера **В**.

Всего – 8 баллов