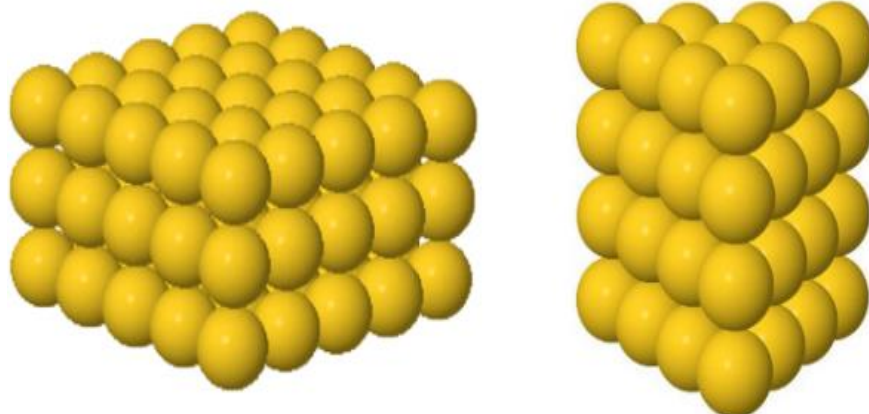


Задача по математике. Призмы (5 баллов)

Вариант 1



Если взять кластер в форме квадратной призмы, на ребро основания которой приходится $a = 3x$ атомов металла, а на боковое ребро – $b = x + 4$ атомов, то из всех составляющих его атомов можно собрать без остатка новый кластер в форме треугольной призмы, на ребро основания которой приходится $c = x$ атомов металла, а на боковое ребро – $d = 27x$ атомов.

Найдите x , а также общее число атомов в исходном кластере. Свой ответ подтвердите расчетом.

Общее число атомов в квадратной призме: $N = a^2b$

Общее число атомов в треугольной призме: $T = cd(c + 1)/2$.

Всего – 5 баллов

Решение варианта 1

Чтобы найти x , запишем условие в виде уравнения:

$$N = T$$

$$a^2b = cd(c + 1)/2$$

$$(3x)^2 \cdot (x + 4) = x \cdot 27x(x + 1)/2$$

Сократим одинаковые множители и упростим уравнение:

$$9x^2(x + 4) = 27x^2(x + 1)/2$$

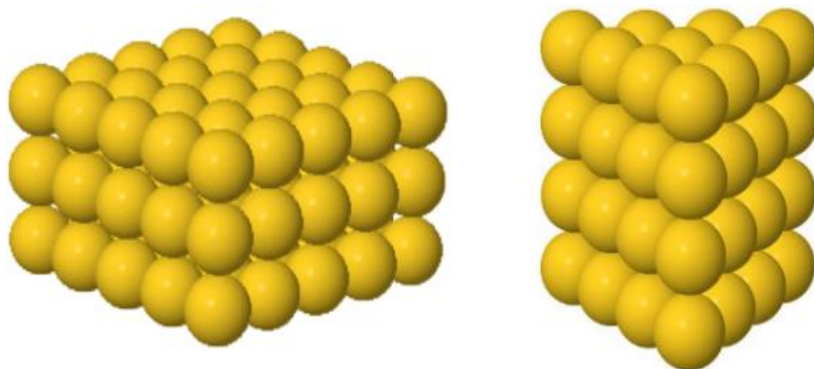
$$x + 4 = 3(x + 1)/2$$

$$2x + 8 = 3x + 3$$

$$x = 5$$

Общее число атомов в исходном кластере равно $N = (3x)^2 \cdot (x + 4) = 15^2 \cdot 9 = 2025$.

Вариант 2



Если взять кластер в форме квадратной призмы, на ребро основания которой приходится $a = 3x$ атомов металла, а на боковое ребро – $b = x + 4$ атомов, то из всех составляющих его атомов можно собрать без остатка новый кластер в форме треугольной призмы, на ребро основания которой приходится $c = x + 4$ атомов металла, а на боковое ребро – $d = 9x$ атомов.

Найдите x , а также общее число атомов в исходном кластере. Свой ответ подтвердите расчетом.

Общее число атомов в квадратной призме: $N = a^2b$

Общее число атомов в треугольной призме: $T = cd(c + 1)/2$.

Всего – 5 баллов

Решение варианта 2

Чтобы найти x , запишем условие в виде уравнения:

$$N = T$$

$$a^2b = cd(c + 1)/2$$

$$(3x)^2 \cdot (x + 4) = (x + 4) \cdot 9x(x + 4 + 1)/2$$

Сократим одинаковые множители и упростим уравнение:

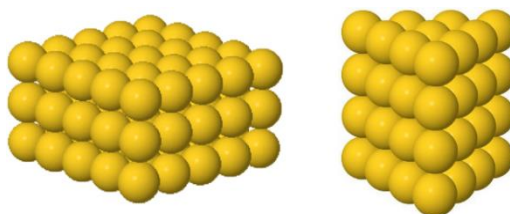
$$9x^2(x + 4) = (x + 4) \cdot 9x(x + 5)/2$$

$$x = (x + 5)/2$$

$$x = 5$$

Общее число атомов в исходном кластере равно $N = (3x)^2 \cdot (x + 4) = 15^2 \cdot 9 = 2025$.

Вариант 3



Если взять кластер в форме квадратной призмы, на ребро основания которой приходится $a = x + 4$ атомов металла, а на боковое ребро – $b = 5x$ атомов, то из всех составляющих его атомов можно собрать без остатка новый кластер в форме треугольной призмы, на ребро основания которой приходится $c = x + 4$ атомов металла, а на боковое ребро – $d = 9x$ атомов.

Найдите x , а также общее число атомов в исходном кластере. Свой ответ подтвердите расчетом.

Общее число атомов в квадратной призме: $N = a^2b$

Общее число атомов в треугольной призме: $T = cd(c + 1)/2$.

Всего – 5 баллов

Решение варианта 3

Чтобы найти x , запишем условие в виде уравнения:

$$N = T$$

$$a^2b = cd(c + 1)/2$$

$$(x + 4)^2 \cdot 5x = (x + 4) \cdot 9x(x + 4 + 1)/2$$

Сократим одинаковые множители и упростим уравнение:

$$(x + 4)^2 \cdot 5x = (x + 4) \cdot 9x(x + 5)/2$$

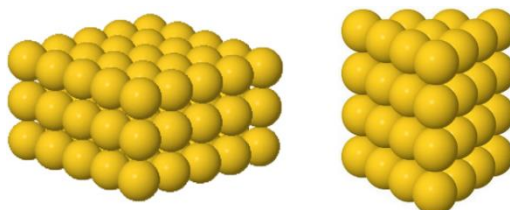
$$(x + 4) \cdot 5 = 9(x + 5)/2$$

$$10x + 40 = 9x + 45$$

$$x = 5$$

Общее число атомов в исходном кластере равно $N = (x + 4)^2 \cdot 5x = 9^2 \cdot 25 = 2025$.

Вариант 4



Если взять кластер в форме квадратной призмы, на ребро основания которой приходится $a = x + 4$ атомов металла, а на боковое ребро – $b = 5x$ атомов, то из всех составляющих его атомов можно собрать без остатка новый кластер в форме треугольной призмы, на ребро основания которой приходится $c = x$ атомов металла, а на боковое ребро – $d = 15(x + 4)$ атомов.

Найдите x , а также общее число атомов в исходном кластере. Свой ответ подтвердите расчетом.

Общее число атомов в квадратной призме: $N = a^2b$

Общее число атомов в треугольной призме: $T = cd(c + 1)/2$.

Всего – 5 баллов

Решение варианта 4

Чтобы найти x , запишем условие в виде уравнения:

$$N = T$$

$$a^2b = cd(c + 1)/2$$

$$(x + 4)^2 \cdot 5x = x \cdot 15(x + 4)(x + 1)/2$$

Сократим одинаковые множители и упростим уравнение:

$$x + 4 = 3(x + 1)/2$$

$$2x + 8 = 3x + 3$$

$$x = 5$$

Общее число атомов в исходном кластере равно $N = (x + 4)^2 \cdot 5x = 9^2 \cdot 25 = 2025$.

Задача по математике. Сушка гидрогеля (8 баллов)

Вариант 1



Гидрогели – это полимерные материалы, отличающиеся способностью поглощать и удерживать воду в количествах, в разы превышающих их собственную массу, а также полностью терять эту воду при термической или вакуумной сушке.

Образец некоторого гидрогеля массой 10 грамм с изначальной массовой долей воды 98% после частичной сушки содержит 96% воды по массе.

1. Чему равна масса гидрогеля после частичной сушки? Во сколько раз она уменьшилась? (2.5 балла)
2. Чему равен объем полностью обезвоженного гидрогеля (в см^3), если его плотность составляет $\rho_r = 1,4 \text{ г/см}^3$? (2 балла)
3. Чему равна плотность исходного образца гидрогеля, если плотность воды $\rho_v = 1,0 \text{ г/см}^3$? (3 балла) Во сколько раз при сушке уменьшается объем этого гидрогеля? (0.5 балла)

Всего – 8 баллов

Решение варианта 1

1. Как следует из условия, масса поглотившей воду частицы равна сумме масс воды и материала гидрогеля:

$$m_1 = m_r + m_{v1}.$$

Массовая доля воды при этом равна

$$\omega = m_v/m \cdot 100\%.$$

При частичной сушке масса материала гидрогеля не меняется, уменьшается только масса поглощенной воды:

$$m_r = m_1 - m_{v1}$$

$$m_{v2} = \omega_2 m_2 / 100\%$$

Подставляя в выражение для массы образца после сушки, получаем:

$$m_2 = m_r + m_{B2} = m_1 - m_{B1} + m_{B2} = m_1 - \omega_1 m_1 / 100\% + \omega_2 m_2 / 100\%$$

Тогда

$$m_2 = m_1(1 - \omega_1/100\%)/(1 - \omega_2/100\%)$$

$$m_2 = 10 \cdot (1 - 98\%/100\%)/(1 - 96\%/100\%) = 10 \cdot 0,02/0,04 = 5 \text{ грамм}$$

То есть, при сушке масса уменьшилась в $10/5 = 2$ раза.

2. Объем обезвоженного гидрогеля равен

$$V_r = m_r / \rho_r = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r$$

$$V_r = (10 - 98\% \cdot 10 / 100\%) / 1,4 = 0,2 / 1,4 = 0,14 \text{ см}^3$$

3. Плотность исходного образца гидрогеля, по определению, равна

$$\rho_1 = m_1 / V_1$$

При этом объем исходного гидрогеля равен сумме объемов обезвоженного гидрогеля и поглощенной им воды:

$$V_1 = V_r + V_{B1} = m_r / \rho_r + m_{B1} / \rho_B$$

$$V_1 = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r + \omega_1 m_1 / 100\% / \rho_B$$

$$V_1 = m_1 (1 / \rho_r + \omega_1 / 100\% (1 / \rho_B - 1 / \rho_r))$$

$$V_1 = \frac{m_1 (\rho_B + \omega_1 / 100\% (\rho_r - \rho_B))}{\rho_B \rho_r}$$

$$V_1 = \frac{10(1 + 98\% / 100\% (1,4 - 1))}{1 \cdot 1,4} = \frac{10(1 + 0,98 \cdot 0,4)}{1,4} = 9,94 \text{ см}^3$$

$$\text{Тогда } \rho_1 = 10 / 9,94 = 1,006 \text{ г/см}^3.$$

При полной сушке объем уменьшается в $V_1 / V_r = 9,94 / 0,14 = 71$ раз.

(Также принимается ответ: при частичной сушке объем уменьшается в $V_1 / V_2 = m_1 / m_2 = 2$ раза)

Вариант 2



Гидрогели – это полимерные материалы, отличающиеся способностью поглощать и удерживать воду в количествах, в разы превышающих их собственную массу, а также полностью терять эту воду при термической или вакуумной сушке.

Образец некоторого гидрогеля массой 10 грамм с изначальной массовой долей воды 98% после частичной сушки содержит 92% воды по массе.

1. Чему равна масса гидрогеля после частичной сушки? Во сколько раз она уменьшилась? (2.5 балла)
2. Чему равен объем полностью обезвоженного гидрогеля (в см^3), если его плотность составляет $\rho_r = 1,4 \text{ г/см}^3$? (2 балла)
3. Чему равна плотность исходного образца гидрогеля, если плотность воды $\rho_v = 1,0 \text{ г/см}^3$? (3 балла) Во сколько раз при сушке уменьшается объем этого гидрогеля? (0.5 балла)

Всего – 8 баллов

Решение варианта 2

1. Как следует из условия, масса поглотившей воду частицы равна сумме масс воды и материала гидрогеля:

$$m_1 = m_r + m_{v1}.$$

Массовая доля воды при этом равна

$$\omega = m_v/m \cdot 100\%.$$

При частичной сушке масса материала гидрогеля не меняется, уменьшается только масса поглощенной воды:

$$m_r = m_1 - m_{v1}$$

$$m_{v2} = \omega_2 m_2 / 100\%$$

Подставляя в выражение для массы образца после сушки, получаем:

$$m_2 = m_r + m_{B2} = m_1 - m_{B1} + m_{B2} = m_1 - \omega_1 m_1 / 100\% + \omega_2 m_2 / 100\%$$

Тогда

$$m_2 = m_1(1 - \omega_1/100\%)/(1 - \omega_2/100\%)$$

$$m_2 = 10 \cdot (1 - 98\%/100\%)/(1 - 92\%/100\%) = 10 \cdot 0,02/0,08 = 2,5 \text{ грамма}$$

То есть, при сушке масса уменьшилась в $10/2,5 = 4$ раза.

2. Объем обезвоженного гидрогеля равен

$$V_r = m_r / \rho_r = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r$$

$$V_r = (10 - 98\% \cdot 10 / 100\%) / 1,4 = 0,2 / 1,4 = 0,14 \text{ см}^3$$

3. Плотность исходного образца гидрогеля, по определению, равна

$$\rho_1 = m_1 / V_1$$

При этом объем исходного гидрогеля равен сумме объемов обезвоженного гидрогеля и поглощенной им воды:

$$V_1 = V_r + V_{B1} = m_r / \rho_r + m_{B1} / \rho_B$$

$$V_1 = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r + \omega_1 m_1 / 100\% / \rho_B$$

$$V_1 = m_1(1/\rho_r + \omega_1/100\%(1/\rho_B - 1/\rho_r))$$

$$V_1 = \frac{m_1(\rho_B + \omega_1/100\%(\rho_r - \rho_B))}{\rho_B \rho_r}$$

$$V_1 = \frac{10(1+98\%/100\%(1,4-1))}{1 \cdot 1,4} = \frac{10(1+0,98 \cdot 0,4)}{1,4} = 9,94 \text{ см}^3$$

$$\text{Тогда } \rho_1 = 10/9,94 = 1,006 \text{ г/см}^3.$$

При полной сушке объем уменьшается в $V_1/V_r = 9,94/0,14 = 71$ раз.

(Также принимается ответ: при частичной сушке объем уменьшается в $V_1/V_2 = m_1/m_2 = 4$ раза)

Вариант 3



Гидрогели – это полимерные материалы, отличающиеся способностью поглощать и удерживать воду в количествах, в разы превышающих их собственную массу, а также полностью терять эту воду при термической или вакуумной сушке.

Образец некоторого гидрогеля массой 10 грамм с изначальной массовой долей воды 96% после частичной сушки содержит 92% воды по массе.

1. Чему равна масса гидрогеля после частичной сушки? Во сколько раз она уменьшилась? (2.5 балла)
2. Чему равен объем полностью обезвоженного гидрогеля (в см^3), если его плотность составляет $\rho_r = 1,4 \text{ г/см}^3$? (2 балла)
3. Чему равна плотность исходного образца гидрогеля, если плотность воды $\rho_v = 1,0 \text{ г/см}^3$? (3 балла) Во сколько раз при сушке уменьшается объем этого гидрогеля? (0.5 балла)

Всего – 8 баллов

Решение варианта 3

1. Как следует из условия, масса поглотившей воду частицы равна сумме масс воды и материала гидрогеля:

$$m_1 = m_r + m_{v1}.$$

Массовая доля воды при этом равна

$$\omega = m_v/m \cdot 100\%.$$

При частичной сушке масса материала гидрогеля не меняется, уменьшается только масса поглощенной воды:

$$m_r = m_1 - m_{v1}$$

$$m_{v2} = \omega_2 m_2 / 100\%$$

Подставляя в выражение для массы образца после сушки, получаем:

$$m_2 = m_r + m_{B2} = m_1 - m_{B1} + m_{B2} = m_1 - \omega_1 m_1 / 100\% + \omega_2 m_2 / 100\%$$

Тогда

$$m_2 = m_1(1 - \omega_1/100\%)/(1 - \omega_2/100\%)$$

$$m_2 = 10 \cdot (1 - 96\%/100\%)/(1 - 92\%/100\%) = 10 \cdot 0,04/0,08 = 5 \text{ грамм}$$

То есть, при сушке масса уменьшилась в $10/5 = 2$ раза.

2. Объем обезвоженного гидрогеля равен

$$V_r = m_r / \rho_r = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r$$

$$V_r = (10 - 96\% \cdot 10 / 100\%) / 1,4 = 0,4 / 1,4 = 0,29 \text{ см}^3$$

3. Плотность исходного образца гидрогеля, по определению, равна

$$\rho_1 = m_1 / V_1$$

При этом объем исходного гидрогеля равен сумме объемов обезвоженного гидрогеля и поглощенной им воды:

$$V_1 = V_r + V_{B1} = m_r / \rho_r + m_{B1} / \rho_B$$

$$V_1 = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r + \omega_1 m_1 / 100\% / \rho_B$$

$$V_1 = m_1(1/\rho_r + \omega_1/100\%(1/\rho_B - 1/\rho_r))$$

$$V_1 = \frac{m_1(\rho_B + \omega_1/100\%(\rho_r - \rho_B))}{\rho_B \rho_r}$$

$$V_1 = \frac{10(1 + 96\%/100\%(1,4 - 1))}{1 \cdot 1,4} = \frac{10(1 + 0,96 \cdot 0,4)}{1,4} = 9,89 \text{ см}^3$$

$$\text{Тогда } \rho_1 = 10/9,89 = 1,011 \text{ г/см}^3.$$

При полной сушке объем уменьшается в $V_1/V_r = 9,89/0,14 = 34,3$ раза.

(Также принимается ответ: при частичной сушке объем уменьшается в $V_1/V_2 = m_1/m_2 = 2$ раза)

Вариант 4



Гидрогели – это полимерные материалы, отличающиеся способностью поглощать и удерживать воду в количествах, в разы превышающих их собственную массу, а также полностью терять эту воду при термической или вакуумной сушке.

Образец некоторого гидрогеля массой 10 грамм с изначальной массовой долей воды 98% после частичной сушки содержит 90% воды по массе.

1. Чему равна масса гидрогеля после частичной сушки? Во сколько раз она уменьшилась? (2.5 балла)
2. Чему равен объем полностью обезвоженного гидрогеля (в см^3), если его плотность составляет $\rho_r = 1,4 \text{ г/см}^3$? (2 балла)
3. Чему равна плотность исходного образца гидрогеля, если плотность воды $\rho_v = 1,0 \text{ г/см}^3$? (3 балла) Во сколько раз при сушке уменьшается объем этого гидрогеля? (0.5 балла)

Всего – 8 баллов

Решение варианта 4

1. Как следует из условия, масса поглотившей воду частицы равна сумме масс воды и материала гидрогеля:

$$m_1 = m_r + m_{v1}.$$

Массовая доля воды при этом равна

$$\omega = m_v/m \cdot 100\%.$$

При частичной сушке масса материала гидрогеля не меняется, уменьшается только масса поглощенной воды:

$$m_r = m_1 - m_{v1}$$

$$m_{v2} = \omega_2 m_2 / 100\%$$

Подставляя в выражение для массы образца после сушки, получаем:

$$m_2 = m_r + m_{B2} = m_1 - m_{B1} + m_{B2} = m_1 - \omega_1 m_1 / 100\% + \omega_2 m_2 / 100\%$$

Тогда

$$m_2 = m_1(1 - \omega_1/100\%)/(1 - \omega_2/100\%)$$

$$m_2 = 10 \cdot (1 - 98\%/100\%)/(1 - 90\%/100\%) = 10 \cdot 0,02/0,10 = 2 \text{ грамма}$$

То есть, при сушке масса уменьшилась в $10/2 = 5$ раз.

2. Объем обезвоженного гидрогеля равен

$$V_r = m_r / \rho_r = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r$$

$$V_r = (10 - 98\% \cdot 10 / 100\%) / 1,4 = 0,2 / 1,4 = 0,14 \text{ см}^3$$

3. Плотность исходного образца гидрогеля, по определению, равна

$$\rho_1 = m_1 / V_1$$

При этом объем исходного гидрогеля равен сумме объемов обезвоженного гидрогеля и поглощенной им воды:

$$V_1 = V_r + V_{B1} = m_r / \rho_r + m_{B1} / \rho_B$$

$$V_1 = (m_1 - \omega_1 m_1 / 100\%) / \rho_r + \omega_1 m_1 / 100\% / \rho_B$$

$$V_1 = m_1(1/\rho_r + \omega_1/100\%(1/\rho_B - 1/\rho_r))$$

$$V_1 = \frac{m_1(\rho_B + \omega_1/100\%(\rho_r - \rho_B))}{\rho_B \rho_r}$$

$$V_1 = \frac{10(1 + 98\%/100\%(1,4 - 1))}{1 \cdot 1,4} = \frac{10(1 + 0,98 \cdot 0,4)}{1,4} = 9,94 \text{ см}^3$$

$$\text{Тогда } \rho_1 = 10/9,94 = 1,006 \text{ г/см}^3.$$

При полной сушке объем уменьшается в $V_1/V_r = 9,94/0,14 = 71$ раз.

(Также принимается ответ: при частичной сушке объем уменьшается в $V_1/V_2 = m_1/m_2 = 5$ раз)

Задача по математике. Математика диатомовых водорослей (12 баллов)

Вариант 1

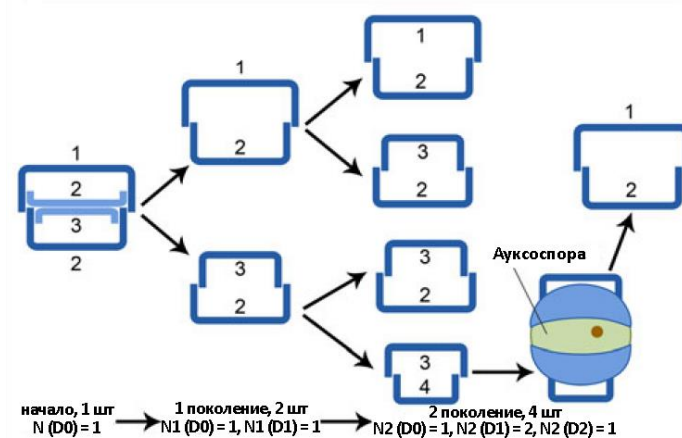


Рис. 1. Схема последовательного роста популяции диатомовых водорослей. На рисунке в качестве примера приведена стадия ауксоспоры, проходящая между вторым и третьим поколениями. Здесь D_i – диаметры панцирей диатомей.

Панцири диатомовых водорослей представляют собой две вложенные друг в друга половинки. При делении каждая дочерняя клетка получает половину панциря от родительской, а недостающие половинки достраиваются как вложенные в уже существующие (рис. 1). Таким образом, в каждом следующем поколении появляются диатомеи все меньшего и меньшего размера. Чтобы избежать полного измельчания, некоторые виды диатомей при достижении некоторого минимального размера научились восстанавливать размер панциря до максимально возможного путем прохождения через стадию ауксоспоры.

1. Некоторая популяция диатомей стартовала с единственной водоросли максимального размера D_0 . Сколько диатомей каждого из размеров будет в такой популяции через:

- 5 поколений; (3 балла)
- 11 поколений, (4 балла)

если прохождение через стадию ауксоспоры впервые происходит после 4 поколения?

Считать, что до завершения процесса восстановления размера через ауккоспору новая стадия деления в популяции не происходит и все сформированные таким образом диатомеи максимального размера также участвуют в дальнейших процессах деления.

2. Некоторая большая популяция диатомей имеет максимальный размер панцирей $D_0 = 50$ мкм и средний размер $D = 43$ мкм. После какого поколения впервые произошло образование ауккоспоры для этой популяции, если она стартовала от одной единственной клетки диаметром D_0 мкм, а размер панциря на каждом шаге уменьшался на $d = 1$ мкм? Обоснуйте свой ответ. (5 баллов)

Всего – 12 баллов

Решение варианта 1

1. Обозначим как D_n минимальный диаметр панциря диатомей (то есть, диаметр большей половины панциря), впервые возникающий в поколении n , а D_0 – максимальный диаметр панциря, отвечающий самой первой клетке водоросли, дающей начало рассматриваемой популяции.

Тогда, при отсутствии стадии ауксоспоры, состав популяции в поколениях будет выглядеть так:

$$0: N_0(D_0) = 1$$

$$1: N_1(D_0) = 1, N_1(D_1) = 1$$

$$2: N_2(D_0) = 1, N_2(D_1) = 2, N_2(D_2) = 1$$

$$3: N_3(D_0) = 1, N_3(D_1) = 3, N_3(D_2) = 3, N_3(D_3) = 1$$

....

$$n: N_n(D_0) = 1, N_n(D_i) = C_n^i \quad (1 \leq i \leq n)$$

Если же в поколении m самая маленькая диатомея проходит через стадию ауксоспоры, то

сразу после деления распределение по размерам выглядит как

$$m: N_m(D_0) = 1, N_m(D_i) = C_m^i \quad (1 \leq i \leq m),$$

а после завершения стадии ауксоспоры -

$$m': N'_m(D_0) = N_m(D_0) + N_m(D_m) = 1 + 1 = 2,$$

$$N'_m(D_i) = C_m^i \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Тогда в следующем за ним поколении после стадии деления будет

$$m+1: N_{m+1}(D_0) = N'_m(D_0),$$

$$N_{m+1}(D_i) = N'_m(D_{i-1}) + N'_m(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$N_{m+1}(D_m) = N'_m(D_{m-1})$$

после ауксоспоры в $m+1$:

$$N'_{m+1}(D_0) = N_{m+1}(D_0) + N_{m+1}(D_m) = N'_m(D_0) + N'_m(D_{m-1}),$$

$$N'_{m+1}(D_i) = N'_m(D_{i-1}) + N'_m(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Или, для произвольного $k > m$ (общей формулы нет, можно записать только через значения, отвечающие предыдущему поколению, $k-1$):

$$k: N_k(D_0) = N'_{k-1}(D_0),$$

$$N_k(D_i) = N'_{k-1}(D_{i-1}) + N'_{k-1}(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$N_k(D_m) = N'_{k-1}(D_{m-1})$$

после ауксоспоры в k :

$$N'_k(D_0) = N_k(D_0) + N_k(D_m) = N'_{k-1}(D_0) + N'_{k-1}(D_{m-1}),$$

$$N'_k(D_i) = N'_{k-1}(D_{i-1}) + N'_{k-1}(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Рассчитаем значения N для $m = 4$ (для $n \geq m$ сразу приведены значения N' , число клеток, пошедших стадию ауксоспоры указано в скобках):

n	$N_n(D_0)$	$N_n(D_1)$	$N_n(D_2)$	$N_n(D_3)$	$N_n(D_4)$
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	2	4	6	4	(1)
5	6	6	10	10	(4)
6	16	12	16	20	(10)
7	36	28	28	36	(20)
8	72	64	56	64	(36)
9	136	136	120	120	(64)
10	256	272	256	240	(120)
11	496	528	528	496	(240)
12	992	1024	1056	1024	(496)
13	2016	2016	2080	2080	(1024)
14	4096	4032	4096	4160	(2080)
15	8256	8128	8128	8256	(4160)

Тогда для $n = 5$

$$N_5(D_0) = 2 + 4 = 6, N_5(D_1) = 6, N_5(D_2) = 10, N_5(D_3) = 10, (N_5(D_4) = 4).$$

Для $n = 11$

$$N_{11}(D_0) = 256 + 240 = 496, N_{11}(D_1) = 528, N_{11}(D_2) = 528, N_{11}(D_3) = 496, (N_{11}(D_4) = 240).$$

2. Как можно видеть из таблицы, приведенной в ответе на первый вопрос, для больших номеров поколений количества диатомей каждого из размеров становятся практически равными, следовательно, средний размер панциря диатомей в популяции равен значению среднего арифметического по всем размерам, от минимального, до максимального:

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} D_i}{m}.$$

Кроме того, из условия роста панцирей диатомовых водорослей легко понять, что с каждым поколением размер панциря уменьшается с шагом d :

$$D_i = D_{i-1} - d.$$

То есть,

$$D_k = D_0 - kd.$$

Тогда

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (D_0 - id)}{m} = \frac{mD_0 - d \sum_{i=0}^{m-1} i}{m} = D_0 - d \frac{m(m-1)}{2m} = D_0 - d \frac{(m-1)}{2}$$

$$\text{и } m = 2(D_0 - D)/d + 1$$

$$m = 2(50 - 43)/1 + 1 = 15.$$

Вариант 2

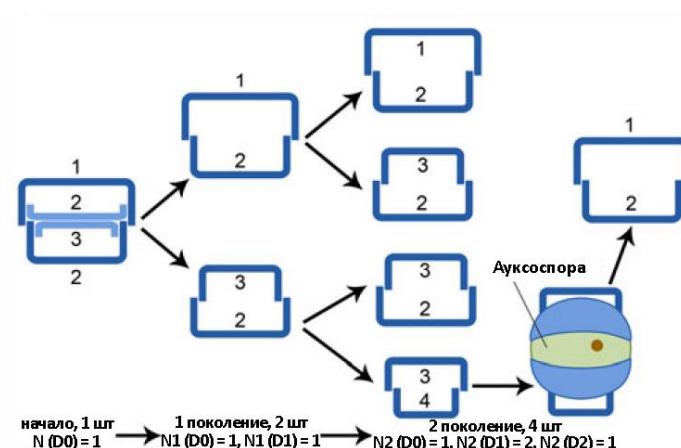


Рис. 1. Схема последовательного роста популяции диатомовых водорослей. На рисунке в качестве примера приведена стадия ауксоспоры, проходящая между вторым и третьим поколениями. Здесь D_i – диаметры панцирей диатомей.

Панцири диатомовых водорослей представляют собой две вложенные друг в друга половинки. При делении каждая дочерняя клетка получает половину панциря от родительской, а недостающие половинки достраиваются как вложенные в уже существующие (рис. 1). Таким образом, в каждом следующем поколении появляются диатомеи все меньшего и меньшего размера. Чтобы избежать полного измельчания, некоторые виды диатомей при достижении некоторого минимального размера научились восстанавливать размер панциря до максимально возможного путем прохождения через стадию ауксоспоры.

1. Некоторая популяция диатомей стартовала с единственной водоросли максимального размера D_0 . Сколько диатомей каждого из размеров будет в такой популяции через:

- 5 поколений; (3 балла)
- 11 поколений, (4 балла)

если прохождение через стадию ауксоспоры впервые происходит после 4 поколения?

Считать, что до завершения процесса восстановления размера через ауксоспору новая стадия деления в популяции не происходит и все сформированные таким образом диатомеи максимального размера также участвуют в дальнейших процессах деления.

2. Некоторая большая популяция диатомей имеет максимальный размер панцирей $D_0 = 60$ мкм и средний размер $D = 53$ мкм. После какого поколения впервые произошло образование ауксоспоры для этой популяции, если она стартовала от одной единственной клетки диаметром D_0 мкм, а размер панциря на каждом шаге уменьшался на $d = 1$ мкм? Обоснуйте свой ответ. (5 баллов)

Всего – 12 баллов

Решение варианта 2

1. Обозначим как D_n минимальный диаметр панциря диатомей (то есть, диаметр большей половинки панциря), впервые возникающий в поколении n , а D_0 – максимальный диаметр панциря, отвечающий самой первой клетке водоросли, дающей начало рассматриваемой популяции.

Тогда, при отсутствии стадии ауксоспоры, состав популяции в поколениях будет выглядеть так:

$$0: N_0(D_0) = 1$$

$$1: N_1(D_0) = 1, N_1(D_1) = 1$$

$$2: N_2(D_0) = 1, N_2(D_1) = 2, N_2(D_2) = 1$$

$$3: N_3(D_0) = 1, N_3(D_1) = 3, N_3(D_2) = 3, N_3(D_3) = 1$$

....

$$n: N_n(D_0) = 1, N_n(D_i) = C_n^i \quad (1 \leq i \leq n)$$

Если же в поколении m самая маленькая диатомея проходит через стадию ауксоспоры, то

сразу после деления распределение по размерам выглядит как

$$m: N_m(D_0) = 1, N_m(D_i) = C_m^i \quad (1 \leq i \leq m),$$

а после завершения стадии ауксоспоры -

$$m': N'_m(D_0) = N_m(D_0) + N_m(D_m) = 1 + 1 = 2,$$

$$N'_m(D_i) = C_m^i (1 \leq i \leq m-1).$$

Тогда в следующем за ним поколении после стадии деления будет

$$m+1: N_{m+1}(D_0) = N'_m(D_0),$$

$$N_{m+1}(D_i) = N'_m(D_{i-1}) + N'_m(D_i) (1 \leq i \leq m-1),$$

$$N_{m+1}(D_m) = N'_m(D_{m-1})$$

после аукоспоры в $m+1$:

$$N'_{m+1}(D_0) = N_{m+1}(D_0) + N_{m+1}(D_m) = N'_m(D_0) + N'_m(D_{m-1}),$$

$$N'_{m+1}(D_i) = N'_m(D_{i-1}) + N'_m(D_i) (1 \leq i \leq m-1).$$

Или, для произвольного $k > m$ (общей формулы нет, можно записать только через значения, отвечающие предыдущему поколению, $k-1$):

$$k: N_k(D_0) = N'_{k-1}(D_0),$$

$$N_k(D_i) = N'_{k-1}(D_{i-1}) + N'_{k-1}(D_i) (1 \leq i \leq m-1),$$

$$N_k(D_m) = N'_{k-1}(D_{m-1})$$

после аукоспоры в k :

$$N'_k(D_0) = N_k(D_0) + N_k(D_m) = N'_{k-1}(D_0) + N'_{k-1}(D_{m-1}),$$

$$N'_k(D_i) = N'_{k-1}(D_{i-1}) + N'_{k-1}(D_i) (1 \leq i \leq m-1).$$

Рассчитаем значения N для $m = 4$ (для $n \geq m$ сразу приведены значения N' , число клеток, пошедших стадию аукоспоры указано в скобках):

n	$N_n(D_0)$	$N_n(D_1)$	$N_n(D_2)$	$N_n(D_3)$	$N_n(D_4)$
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	2	4	6	4	(1)
5	6	6	10	10	(4)
6	16	12	16	20	(10)
7	36	28	28	36	(20)
8	72	64	56	64	(36)
9	136	136	120	120	(64)
10	256	272	256	240	(120)
11	496	528	528	496	(240)
12	992	1024	1056	1024	(496)

13	2016	2016	2080	2080	(1024)
14	4096	4032	4096	4160	(2080)
15	8256	8128	8128	8256	(4160)

Тогда для $n = 5$

$$N_5(D_0) = 2 + 4 = 6, N_5(D_1) = 6, N_5(D_2) = 10, N_5(D_3) = 10, (N_5(D_4) = 4).$$

Для $n = 11$

$$N_{11}(D_0) = 256 + 240 = 496, N_{11}(D_1) = 528, N_{11}(D_2) = 528, N_{11}(D_3) = 496, (N_{11}(D_4) = 240).$$

2. Как можно видеть из таблицы, приведенной в ответе на первый вопрос, для больших номеров поколений количества диатомей каждого из размеров становятся практически равными, следовательно, средний размер панциря диатомей в популяции равен значению среднего арифметического по всем размерам, от минимального, до максимального:

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} D_i}{m}.$$

Кроме того, из условия роста панцирей диатомовых водорослей легко понять, что с каждым поколением размер панциря уменьшается с шагом d :

$$D_i = D_{i-1} - d.$$

То есть,

$$D_k = D_0 - kd.$$

Тогда

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (D_0 - id)}{m} = \frac{mD_0 - d \sum_{i=0}^{m-1} i}{m} = D_0 - d \frac{m(m-1)}{2m} = D_0 - d(m-1)/2$$

$$\text{и } m = 2(D_0 - D)/d + 1$$

$$m = 2(60 - 53)/1 + 1 = 15.$$

Вариант 3

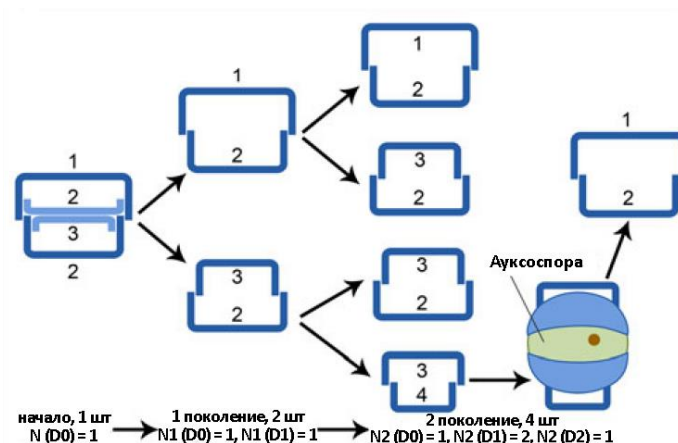


Рис. 1. Схема последовательного роста популяции диатомовых водорослей. На рисунке в качестве примера приведена стадия аукоспоры, проходящая между вторым и третьим поколениями. Здесь D_i – диаметры панцирей диатомей.

Панцири диатомовых водорослей представляют собой две вложенные друг в друга половинки. При делении каждая дочерняя клетка получает половину панциря от родительской, а недостающие половинки достраиваются как вложенные в уже существующие (рис. 1). Таким образом, в каждом следующем поколении появляются диатомеи все меньшего и меньшего размера. Чтобы избежать полного измельчания, некоторые виды диатомей при достижении некоторого минимального размера научились восстанавливать размер панциря до максимально возможного путем прохождения через стадию аукоспоры.

1. Некоторая популяция диатомей стартовала с единственной водоросли максимального размера D_0 . Сколько диатомей каждого из размеров будет в такой популяции через:

- 5 поколений; (3 балла)
- 12 поколений, (4 балла)

если прохождение через стадию аукоспоры впервые происходит после 4 поколения?

Считать, что до завершения процесса восстановления размера через аукоспору новая стадия деления в популяции не происходит и все сформированные таким образом диатомеи максимального размера также участвуют в дальнейших процессах деления.

2. Некоторая большая популяция диатомей имеет максимальный размер панцирей $D_0 = 50$ мкм и средний размер $D = 39$ мкм. После какого поколения впервые произошло образование аукоспоры для этой популяции, если она стартовала от одной единственной клетки диаметром D_0 мкм, а размер панциря на каждом шаге уменьшался на $d = 1$ мкм? Обоснуйте свой ответ. (5 баллов)

Всего – 12 баллов

Решение варианта 3

1. Обозначим как D_n минимальный диаметр панциря диатомей (то есть, диаметр большей половины панциря), впервые возникающий в поколении n , а D_0 – максимальный диаметр панциря, отвечающий самой первой клетке водоросли, дающей начало рассматриваемой популяции.

Тогда, при отсутствии стадии ауксоспоры, состав популяции в поколениях будет выглядеть так:

$$0: N_0(D_0) = 1$$

$$1: N_1(D_0) = 1, N_1(D_1) = 1$$

$$2: N_2(D_0) = 1, N_2(D_1) = 2, N_2(D_2) = 1$$

$$3: N_3(D_0) = 1, N_3(D_1) = 3, N_3(D_2) = 3, N_3(D_3) = 1$$

....

$$n: N_n(D_0) = 1, N_n(D_i) = C_n^i \quad (1 \leq i \leq n)$$

Если же в поколении m самая маленькая диатомея проходит через стадию ауксоспоры, то сразу после деления распределение по размерам выглядит как

$$m: N_m(D_0) = 1, N_m(D_i) = C_m^i \quad (1 \leq i \leq m),$$

а после завершения стадии ауксоспоры -

$$m': N'_m(D_0) = N_m(D_0) + N_m(D_m) = 1 + 1 = 2,$$

$$N'_m(D_i) = C_m^i \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Тогда в следующем за ним поколении после стадии деления будет

$$m+1: N_{m+1}(D_0) = N'_m(D_0),$$

$$N_{m+1}(D_i) = N'_m(D_{i-1}) + N'_m(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$N_{m+1}(D_m) = N'_m(D_{m-1})$$

после ауксоспоры в $m+1$:

$$N'_{m+1}(D_0) = N_{m+1}(D_0) + N_{m+1}(D_m) = N'_m(D_0) + N'_m(D_{m-1}),$$

$$N'_{m+1}(D_i) = N'_m(D_{i-1}) + N'_m(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Или, для произвольного $k > m$ (общей формулы нет, можно записать только через значения, отвечающие предыдущему поколению, $k-1$):

$$k: N_k(D_0) = N'_{k-1}(D_0),$$

$$N_k(D_i) = N'_{k-1}(D_{i-1}) + N'_{k-1}(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1),$$

$$N_k(D_m) = N'_{k-1}(D_{m-1})$$

после аукоспоры в k :

$$N'_k(D_0) = N_k(D_0) + N_k(D_m) = N'_{k-1}(D_0) + N'_{k-1}(D_{m-1}),$$

$$N'_k(D_i) = N'_{k-1}(D_{i-1}) + N'_{k-1}(D_i) \quad (1 \leq i \leq m-1).$$

Рассчитаем значения N для $m = 4$ (для $n \geq m$ сразу приведены значения N' , число клеток, пошедших стадию аукоспоры указано в скобках):

n	$N_n(D_0)$	$N_n(D_1)$	$N_n(D_2)$	$N_n(D_3)$	$N_n(D_4)$
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	2	4	6	4	(1)
5	6	6	10	10	(4)
6	16	12	16	20	(10)
7	36	28	28	36	(20)
8	72	64	56	64	(36)
9	136	136	120	120	(64)
10	256	272	256	240	(120)
11	496	528	528	496	(240)
12	992	1024	1056	1024	(496)
13	2016	2016	2080	2080	(1024)
14	4096	4032	4096	4160	(2080)
15	8256	8128	8128	8256	(4160)

Тогда для $n = 5$

$$N_5(D_0) = 2 + 4 = 6, N_5(D_1) = 6, N_5(D_2) = 10, N_5(D_3) = 10, (N_5(D_4) = 4).$$

Для $n = 12$

$$N_{12}(D_0) = 496 + 496 = 992, N_{12}(D_1) = 1024, N_{12}(D_2) = 1056, N_{12}(D_3) = 1024, (N_{12}(D_4) = 496).$$

2. Как можно видеть из таблицы, приведенной в ответе на первый вопрос, для больших номеров поколений количества диатомей каждого из размеров становятся практически равными, следовательно, средний размер панциря диатомей в популяции равен значению среднего арифметического по всем размерам, от минимального, до максимального:

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} D_i}{m}.$$

Кроме того, из условия роста панцирей диатомовых водорослей легко понять, что с каждым поколением размер панциря уменьшается с шагом d :

$$D_i = D_{i-1} - d.$$

То есть,

$$D_k = D_0 - kd.$$

Тогда

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (D_0 - id)}{m} = \frac{mD_0 - d \sum_{i=0}^{m-1} i}{m} = D_0 - d \frac{m(m-1)}{2m} = D_0 - d \frac{(m-1)}{2}$$

$$\text{и } m = 2(D_0 - D)/d + 1$$

$$m = 2(50 - 39)/1 + 1 = 23.$$

Вариант 4

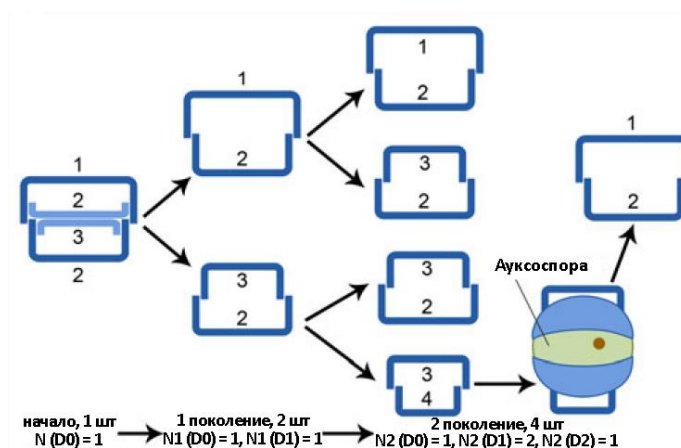


Рис. 1. Схема последовательного роста популяции диатомовых водорослей. На рисунке в качестве примера приведена стадия ауксоспоры, проходящая между вторым и третьим поколениями. Здесь D_i – диаметры панцирей диатомей.

Панцири диатомовых водорослей представляют собой две вложенные друг в друга половинки. При делении каждая дочерняя клетка получает половину панциря от родительской, а недостающие половинки достраиваются как вложенные в уже существующие (рис. 1). Таким образом, в каждом следующем поколении появляются диатомеи все меньшего и меньшего размера. Чтобы избежать полного измельчания, некоторые виды диатомей при достижении некоторого минимального размера научились восстанавливать размер панциря до максимально возможного путем прохождения через стадию ауксоспоры.

1. Некоторая популяция диатомей стартовала с единственной водоросли максимального размера D_0 . Сколько диатомей каждого из размеров будет в такой популяции через:

- 5 поколений; (3 балла)
- 12 поколений, (4 балла)

если прохождение через стадию ауксоспоры впервые происходит после 4 поколения?

Считать, что до завершения процесса восстановления размера через ауксоспору новая стадия деления в популяции не происходит и все сформированные таким образом диатомеи максимального размера также участвуют в дальнейших процессах деления.

2. Некоторая большая популяция диатомей имеет максимальный размер панцирей $D_0 = 60$ мкм и средний размер $D = 49$ мкм. После какого поколения впервые произошло образование ауксоспоры для этой популяции, если она стартовала от одной единственной клетки диаметром D_0 мкм, а размер панциря на каждом шаге уменьшался на $d = 1$ мкм? Обоснуйте свой ответ. (5 баллов)

Всего – 12 баллов

Решение варианта 4

1. Обозначим как D_n минимальный диаметр панциря диатомей (то есть, диаметр большей половинки панциря), впервые возникающий в поколении n , а D_0 – максимальный диаметр панциря, отвечающий самой первой клетке водоросли, дающей начало рассматриваемой популяции.

Тогда, при отсутствии стадии ауксоспоры, состав популяции в поколениях будет выглядеть так:

$$0: N_0(D_0) = 1$$

$$1: N_1(D_0) = 1, N_1(D_1) = 1$$

$$2: N_2(D_0) = 1, N_2(D_1) = 2, N_2(D_2) = 1$$

$$3: N_3(D_0) = 1, N_3(D_1) = 3, N_3(D_2) = 3, N_3(D_3) = 1$$

....

$$n: N_n(D_0) = 1, N_n(D_i) = C_n^i \quad (1 \leq i \leq n)$$

Если же в поколении m самая маленькая диатомея проходит через стадию ауксоспоры, то

сразу после деления распределение по размерам выглядит как

$$m: N_m(D_0) = 1, N_m(D_i) = C_m^i \quad (1 \leq i \leq m),$$

а после завершения стадии ауксоспоры -

$$m': N'_m(D_0) = N_m(D_0) + N_m(D_m) = 1 + 1 = 2,$$

$$N'_m(D_i) = C_m^i (1 \leq i \leq m-1).$$

Тогда в следующем за ним поколении после стадии деления будет

$$m+1: N_{m+1}(D_0) = N'_m(D_0),$$

$$N_{m+1}(D_i) = N'_m(D_{i-1}) + N'_m(D_i) (1 \leq i \leq m-1),$$

$$N_{m+1}(D_m) = N'_m(D_{m-1})$$

после аукоспоры в $m+1$:

$$N'_{m+1}(D_0) = N_{m+1}(D_0) + N_{m+1}(D_m) = N'_m(D_0) + N'_m(D_{m-1}),$$

$$N'_{m+1}(D_i) = N'_m(D_{i-1}) + N'_m(D_i) (1 \leq i \leq m-1).$$

Или, для произвольного $k > m$ (общей формулы нет, можно записать только через значения, отвечающие предыдущему поколению, $k-1$):

$$k: N_k(D_0) = N'_{k-1}(D_0),$$

$$N_k(D_i) = N'_{k-1}(D_{i-1}) + N'_{k-1}(D_i) (1 \leq i \leq m-1),$$

$$N_k(D_m) = N'_{k-1}(D_{m-1})$$

после аукоспоры в k :

$$N'_k(D_0) = N_k(D_0) + N_k(D_m) = N'_{k-1}(D_0) + N'_{k-1}(D_{m-1}),$$

$$N'_k(D_i) = N'_{k-1}(D_{i-1}) + N'_{k-1}(D_i) (1 \leq i \leq m-1).$$

Рассчитаем значения N для $m = 4$ (для $n \geq m$ сразу приведены значения N' , число клеток, пошедших стадию аукоспоры указано в скобках):

n	$N_n(D_0)$	$N_n(D_1)$	$N_n(D_2)$	$N_n(D_3)$	$N_n(D_4)$
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0
3	1	3	3	1	0
4	2	4	6	4	(1)
5	6	6	10	10	(4)
6	16	12	16	20	(10)
7	36	28	28	36	(20)
8	72	64	56	64	(36)
9	136	136	120	120	(64)
10	256	272	256	240	(120)
11	496	528	528	496	(240)
12	992	1024	1056	1024	(496)

13	2016	2016	2080	2080	(1024)
14	4096	4032	4096	4160	(2080)
15	8256	8128	8128	8256	(4160)

Тогда для $n = 5$

$$N_5(D_0) = 2 + 4 = 6, N_5(D_1) = 6, N_5(D_2) = 10, N_5(D_3) = 10, (N_5(D_4) = 4).$$

Для $n = 12$

$$N_{12}(D_0) = 496 + 496 = 992, N_{12}(D_1) = 1024, N_{12}(D_2) = 1056, N_{12}(D_3) = 1024, (N_{12}(D_4) = 496).$$

2. Как можно видеть из таблицы, приведенной в ответе на первый вопрос, для больших номеров поколений количества диатомей каждого из размеров становятся практически равными, следовательно, средний размер панциря диатомей в популяции равен значению среднего арифметического по всем размерам, от минимального, до максимального:

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} D_i}{m}.$$

Кроме того, из условия роста панцирей диатомовых водорослей легко понять, что с каждым поколением размер панциря уменьшается с шагом d :

$$D_i = D_{i-1} - d.$$

То есть,

$$D_k = D_0 - kd.$$

Тогда

$$D = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (D_0 - id)}{m} = \frac{mD_0 - d \sum_{i=0}^{m-1} i}{m} = D_0 - d \frac{m(m-1)}{2m} = D_0 - d(m-1)/2$$

$$\text{и } m = 2(D_0 - D)/d + 1$$

$$m = 2(60 - 49)/1 + 1 = 23.$$