10 класс

10.1. *Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^3 > y^2$ и $y^3 > x^2$. Докажите, что $x + y > 2$.*

Решение. Числа x и y положительны, так как куб каждого из них больше неотрицательного числа — квадрата другой переменной. Значит, можно перемножить левые и правые части неравенств. Получим

$$x^3y^3 > x^2y^2 \Leftrightarrow xy > 1 \Leftrightarrow y > \frac{1}{x}.$$

Тогда

$$x + y > x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 + 2 \geqslant 2,$$

что и требовалось доказать.

10.2. *Рассказывая об однокруговом турнире по шахматам (каждый участник сыграл с каждым по одной партии), комментатор сказал следующее: «В турнире участвовали 15 человек; победитель турнира набрал вдвое больше очков, чем участник, занявший последнее место. Остальные 13 участников набрали одно и тоже промежуточное (между первым и последним) количество очков, поделив, таким образом, места с 2-го по 14-е.» Докажите, что комментатор хоть раз, да ошибся. (В шахматной партии победитель получает одно очко, проигравший — ноль очков, а в случае ничьей оба участника получают по пол-очка.)*

Решение. Всего в турнире было проведено $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ партий; следовательно, участники набрали в сумме 105 очков ровно. Пусть занявший последнее место набрал x очков, тогда победитель набрал $2x$ очков. Пусть также каждый из остальных 13 участников набрал y очков (Числа x и y — целые или полуцелые, то есть это дроби, знаменатели которых 1 или 2; по условию $x < y < 2x$). Имеем равенство

$$x + 2x + 13y = 105.$$

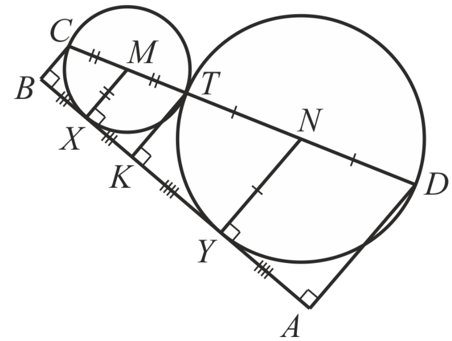
Теперь, если $y = 7$, то $3x = 14$, откуда x — не полуцелое. Если $y \geqslant 7,5$, то $3x \leqslant 6,5$, откуда $2x < 6,5 < y$ — противоречие. Наконец, если $y \leqslant 6,5$, то $3x \geqslant 20,5$, $x \geqslant 6,5 \geqslant y$ — снова противоречие.

10.3. *В прямоугольной трапеции $ABCD$ на большей боковой стороне CD нашлась такая точка T, что окружности с диаметрами CT и TD касаются боковой стороны AB каждая. Обозначим точки касания стороны AB окружностями как X и Y. Может ли оказаться, что $AY = BX$? Ответ обоснуйте.*

Решение. Пусть M — центр окружности с диаметром CT, N — с диаметром DT.

Тогда $MC = MT = MX$ и $ND = NT = NY$. Кроме того $MX \perp AB$ и $NY \perp AB$, как радиусы, проведённые в точку касания окружности и прямой. Опустим из точки T перпендикуляр на AB, отрезок TK. Тогда MX — средняя линия трапеции $KBCT$, поэтому $KX = XB$. Аналогично $KY = YA$.

Если $AY = BX$, то $YK = KX$, отрезок KT — средняя линия трапеции $YXMN$ и $MT = TN$. Это означает, что окружности равны, (а точка T — середина стороны CD). Но тогда $AB \parallel CD$, что невозможно по определению трапеции.

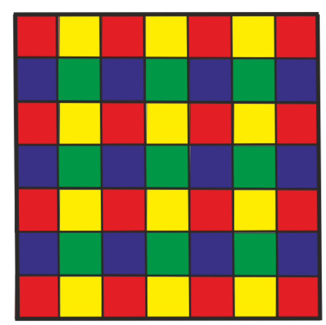


К решению задачи 10.3

Ответ. Не может.

10.4. *Квадрат 7×7 разрезали без остатка (по линиям сетки) на трёхклеточные уголки и маленькие квадраты размера 2×2. Докажите, что маленький квадрат получился ровно один.*

Решение. Раскрасим клетки квадрата в 4 цвета (см. рисунок). Заметим, что две клетки одного цвета не могут попасть ни в какую одну фигуру, на которые квадрат разрезан. Тогда, поскольку у нас есть 16 красных клеток, общее число уголков и квадратов со стороной 2 не менее 16. Пусть квадратов x, а уголков y. Тогда $x + y \geqslant 16$ и $3x + 3y \geqslant 48$. Из подсчёта количества клеток следует равенство $4x + 3y = 49$, откуда $3x + 3y = 49 - x$. Значит, $49 - x \geqslant 48$ и $x \leqslant 1$. Ещё заметим, что $x \neq 0$, так как 49 на 3 нацело не делится.



К решению задачи 10.4

10.5. *В скачках участвовали три лошади. В букмекерской конторе принимают ставки из расчёта: на победу первой лошади $4 : 1$ (т. е., если первая лошадь побеждает, то игроку возвращают поставленные на нее деньги и еще в четыре раза больше; в противном случае игрок теряет все поставленные деньги), на победу второй — $3 : 1$, на победу третьей — $1 : 1$. Каждая ставка выражается положительным целым числом золотых.*

а) Буратино собирается поставить на всех трёх лошадей, но так, чтобы вне зависимости от исхода скачек получить по крайней мере на 2 золотых больше, чем поставил. Подскажите Буратино сколько золотых на какую лошадь поставить, если общая сумма поставленных денег равна 50 золотым. *(3 балла)*

б) Пьеро желает поставить в сумме ровно 25 золотых, чтобы получить гарантированно хотя бы на 1 золотой больше. Сможет ли он это сделать? *(2 балла)* *в) Папа Карло намерен сделать такие ставки, чтобы гарантированно получить на 5 золотых больше, чем он поставил. Какую наименьшую сумму денег для этого он должен иметь?* *(5 баллов)*

г) Карабас-Барабас хочет так сделать ставки, чтобы гарантированно получить денег хотя бы на 6% больше, чем поставлено. Сможет ли он это сделать? Денег у Карабаса-Барабаса куры не клюют. *(4 балла)*

Решение. а) Если Буратино поставит 11 золотых на первую лошадь, 13 — на вторую и 26 на третью, то он всегда получит мимимум на 2 золотых больше. Действительно, если побеждит первая лошадь, он получит 55 золотых (11 — возврат ставки и 44 выигрыш), если вторая — 52 золотых (из них 13 — это возврат ставки), а если третья — 52 золотых (26 — возврат ставки).

Можно доказать, рассуждая, например, как в следующем пункте, что такое размещение денег Буратино строго единственно.

б) Чтобы гарантированно выиграть, Пьеро должен на каждую лошадь ставить столько, чтобы полученные за выигрыш деньги (вместе с возвратом ставки) превзошли 25 золотых. Значит, на первую лошадь он обязан ставить больше $25 : 5 = 5$ золотых, на вторую — больше $25 : 4 = 6,25$ и на третью — больше $25 : 2 = 12,5$. Так как все ставки целочислены, он должен поставить в сумме $6+7+13 = 26 > 25$, поэтому гарантировать себе хоть какой-то выигрыш он не сможет.

в) Пусть Папа Карло поставил всего S золотых, из которых x на первую лошадь, y — на вторую и z — на третью ($x+y+z = S$). Предположим, что выиграла первая лошадь. Тогда Папа Карло получит $x + 4x = 5x$, и ему необходимо, чтобы эта величина была больше, чем S хотя бы на 5. Имеем неравенство $5x \geqslant S + 5$, то есть $x \geqslant \frac{S}{5} + 1$. Теперь предположим, что выиграла вторая лошадь; аналогичные рассуждения приводят к неравенству $y \geqslant \frac{S}{4} + 1,25$. Наконец, предполагая, что выиграет третья лошадь, придём к неравенству $z \geqslant \frac{S}{2} + 2,5$. Сложив все три полученные неравенства, получим $x+y+z \geqslant \frac{19S}{20} + 4,75$. Так как $x + y + z = S$, последнее неравенство равносильно условию $S \geqslant 95$.

Пример, когда $S = 95$, получится, если мы в предыдущем рассуждении все неравенства заменим равенствами. Тогда $x = 20$, $y = 25$ и $z = 50$. Легко проверить, что при любом исходе скачек Папа Карло выиграет свои 5 золотых.

г) Рассуждения аналогичны рассуждениям предыдущего пункта. Пусть Карабас-Барабас поставил S золотых, из которых x на первую лошадь, y — на вторую и z — на третью. Для гарантированного 6% выигрыша необходимо на каждую лошадь поставить столько, чтобы полученные за её выигрыш деньги (вместе с возвратом поставленных) были не менее, чем $1,06S$. Это эквивалентно выполнению системы неравенств: $5x \geqslant 1,06S$, $4y \geqslant 1,06S$ и $2z \geqslant 1,06S$. Умножим первое неравенство на 4, второе — на 5, третье — на 10 и сложим левые и правые части всех трёх неравенств. Получим $20(x + y+z) \geqslant 1,06S(4+5+10)$, откуда (с учётом того, что $x+y+z = S$), получим невозможное неравенство $20 \geqslant 20,14$. Значит, 6% выигрыша гарантировать невозможно.