## 11 класс

**11.1.** *Решите уравнение*

$$x^4 + 2x\sqrt{x-1} + 3x^2 - 8x + 4 = 0.$$

**Решение.** Проверим, что $x = 1$ — корень. Действительно,

$$1^4 + 2\sqrt{1-1} + 3 \cdot 1^2 - 8 + 4 = 1 + 3 - 8 + 4 = 0.$$

Покажем, что других корней нет. Поскольку левая часть уравнения определена лишь при $x \geqslant 1$, достаточно рассмотреть случай $x > 1$. Воспользовавшись верными в этом случае неравенствами $x^4 > x^2$, $x\sqrt{x-1} > 0$ и $(x-1)^2 > 0$, получаем для левой части неравенство

$$x^4 + 2x\sqrt{x-1} + 3x^2 - 8x + 4 > 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2 > 0,$$

выполненное при всех $x > 1$. Итак, при $x > 1$ корней нет.

**Ответ.** $x = 1$.

**11.2.** *Дан тетраэдр. Обязательно ли найдутся ли четыре параллельные плоскости, проходящие каждая через свою вершину тетраэдра так, чтобы расстояния между любыми соседними плоскостями были одинаковыми?*

**Решение.** Пусть дан тетраэдр $ABCD$. Отметим на ребре $AD$ две точки $K, L$ так, чтобы $AK : KL : LD = 1 : 1 : 1$. Заметим, что отрезки $KB$ и $CL$ не находятся на одной прямой. Тогда можно провести через вершины $A, K, L, D$ плоскости $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C, \alpha_D$ параллельно $KB$ и $CL$. Осталось показать, что соседние среди этих четырех плоскостей находятся на одном и том же расстоянии между собой.

Действительно, по построению $\alpha_B, \alpha_C$ будут проходить через $K, L$ соответственно. Опустим из $D$ на плоскость $\alpha_A$ перпендикуляр $AH$. Применяя теорему Фалеса к $AD$ и $AH$, получим что перпендикуляр $AH$ делится плоскостями $\alpha_B, \alpha_C$ в отношении $AK : KL : LD = 1 : 1 : 1$. Поскольку перпендикуляр общий ко всем плоскостям, то всё показано.

**Ответ.** Можно.

**11.3.** *Даны различные простые числа $p$, $q$, $r$. Произведение $pqr$ нацело делится на $p + q + r$. Докажите, что $(p-1)(q-1)(r-1) + 1$ является квадратом натурального числа.*

**Решение.** Делители числа $pqr$ — суть числа 1, $p$, $q$, $r$, $pr$, $pq$, $qr$ и $pqr$. Число $p + q + r$ больше первых четырёх из них и меньше последнего, то есть оно одно из чисел $pr$, $pq$, $qr$. Без ограничения общности $p + q + r = pq$, то есть $-p - q + pq = r$. Тогда

$$(p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = r + 1$$

и

$$(p-1)(q-1)(r-1)+1=(r+1)(r-1)+1=r^2.$$

**11.4.** *Нюша имеет 2022 монеты, а Бараш — 2023. Нюша и Бараш бросают все свои монеты одновременно и считают сколько орлов выпало у каждого. Выигрывает тот из них, у кого окажется орлов больше, а в случае равенства выигрывает Нюша. С какой вероятностью выигрывает Нюша?*

**Решение.** Пусть Бараш пока забыл про последнюю свою монету. Если у Бараша больше — он уже выиграл, если у Нюши больше — уже проиграл, шансы этих вариантов одинаковы, поскольку монет у них одинаково. Если же случилась ничья, то исход решит забытая монета, где снова шансы каждого — $50:50$. Итак, их шансы равны, вероятность выигрыша Нюши равна $0,5$.

**Ответ.** $0,5$.

**11.5.** *Крош, узнав корни уравнения $x^2-x-1=0$, изобрел «золотую систему счисления Кроша», систему счисления с основанием $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Лосяш отметил, что фактически Крош находит разложения положительных чисел на суммы каких-то различных целых степеней числа $\varphi$. Например, в этой системе счисления запись $11,1$ соответствует числу*

$$1+\sqrt{5}=\varphi^1+\varphi^0+\varphi^{-1}.$$

*Лосяш также заявил, что если число имеет разложение, то у него их бесконечно много и всегда можно обойтись разложением, в котором нет пары соседних степеней $\varphi$; само же разложение есть у всех положительных чисел $\frac{m+n\sqrt{5}}{2}$, где $m,n$ — целые и одной четности. Докажите, что Лосяш прав, для чего:*

*а) Найдите хотя бы пять различных разложений числа 1.* *(2 балла)*

*б) Докажите, что если число можно разложить в такую сумму, то можно и в сумму, в которой нет пары соседних степеней $\varphi$.* *(2 балла)*

*в) Докажите, что если $a$ разложимо, то и $a+1$ разложимо.* *(3 балла)*

*г) Докажите, что сумма и произведение разложимых чисел также разложимы.* *(2 балла)*

*д) Докажите, что если для каких-то целых $m,n$ одной четности число $\frac{m+n\sqrt{5}}{2}$ положительно, то это число разложимо.* *(5 баллов)*

**Решение.** а) Заметим, что $\varphi$, как корень $\varphi^2-\varphi-1=0$, дает $1=\varphi^{-1}+\varphi^{-2}=0.11_\varphi$. Последовательно воспользовавшись $\varphi^{-k}=\varphi^{-k-1}+\varphi^{-k-2}$ для всех $k$, получаем $1=1,0_\varphi=0,11_\varphi=0,1011_\varphi=0,101011_\varphi=0,10101011_\varphi=\ldots$, то есть для всех натуральных $k$,

$$1=\varphi^{-1}+\varphi^{-3}+\ldots+\varphi^{-2k+1}+\varphi^{-2k}.$$

Выбор пяти различных натуральных чисел, равно как подстановку их в формулу выше, предоставляем читателю.

б) От противного, пусть нашлось разложимое число $a$, любое разложение которого содержит соседние степени. Среди всех разложений возьмем то, что с наименьшим числом слагаемых. Среди его слагаемых есть соседние степени $\varphi^k$, $\varphi^{k-1}$, выберем такое $k$ наибольшее. Тогда слагаемого $\varphi^{k+1}$ в этом разложении нет. Поскольку $\varphi^{k+1} = \varphi^{k-1}\varphi^2 = \varphi^{k-1}(\varphi + 1) = \varphi^k + \varphi^{k-1}$, то, заменяя $\varphi^k + \varphi^{k-1}$ на $\varphi^{k+1}$, получим из исходного разложение $a$, строка которого содержит меньшее число слагаемых, но это противоречит выбору разложения. Значит всегда найдется разложение без соседних степеней.

в) Число $a$ разложимо, выберем его разложение без соседних степеней. Пусть $k$ — наименьшее целое неотрицательное число такое, что слагаемого $\varphi^{-2k}$ в разложении нет. Поскольку слагаемых конечное число, такое найдётся. Если $k = 0$, то, добавив $\varphi^0$ в сумму, мы получим разложение у $a + 1$. Поэтому можно считать, что $\varphi^0$ уже есть. В разложении $a$ еще есть слагаемые $\varphi^{-2}, \ldots, \varphi^{-2k+2}$, а значит нет $\varphi^{-1}, \varphi^{-3}, \ldots, \varphi^{-2k+1}$. По выбору $k$ там нет и $\varphi^{-2k}$. Поскольку $\varphi^{-1} + \varphi^{-3} + \ldots + \varphi^{-2k+1} + \varphi^{-2k} = 1$, то добавляя эти слагаемые в исходное разложение, получаем разложение $a + 1$.

г) Если добавление единицы сохраняет разложимость, то и добавление $\varphi^k$ (при любом целом $k$). Ну то же имееет место при сложении с любым конечным числом целых степеней $\varphi$, то есть с любым разложимым числом.

Представим два разложимых числа $a_1, a_2$ в виде суммы степеней $\varphi$ ($r_1$ и $r_2$ степеней $\varphi$ соответственно). После их перемножения мы получим сумму $r_1 r_2$ степеней $\varphi$. Каждая степень разложима, значит и сумма этих $r_1 r_2$ чисел также разложима. Но эта сумма и являлась произведением $a_1 a_2$.

д) Лемма. Если разложимо $a > 1$, то разложимо и $a - 1$.

Доказательство леммы. Рассмотрим разложение $a$ без соседних степеней. Пусть его старшая степень равна $k$. Случай $k = 0$ очевиден. Случай $k < 0$ невозможен в силу $1 < a < \varphi^{-k}(1 + \ldots + \varphi^{-2r} + \ldots) = \frac{\varphi^{-k}}{1-\varphi^{-2}} \leqslant 1$. Итак, $k > 0$.

Отметим, что $a - \varphi^k$ разложимо, причем $a - 1 = a - \varphi^k + \varphi^k(1 - \varphi^{-k})$. Поскольку сумма разложимых разложима, достаточно показать разложимость $1 - \varphi^{-k}$. Среди разложений единицы найдется и имеющее слагаемое $\varphi^{-k}$. Тогда $1 - \varphi^{-k}$, а следом $\varphi^k - 1$ и $a - 1$ разложимы. Лемма доказана.

Из леммы, если неразложимо $a$, то и $a + \varphi = \varphi(a\varphi^{-1} + 1)$. Если бы нашлось неразложимое число $a = \frac{m+n\sqrt{5}}{2}$ с целыми $m, n$ одной четности, то, добавляя $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ несколько раз, нашли бы и неразложимое $m' + n'\sqrt{5}$ с натуральными $m', n'$. Но это число всегда разложимо как сумма слагаемых 1 и $\sqrt{5}$. Значит и исходного числа $a$ не существует.