РЕШЕНИЯ

5 класс

5.1. *Евгений укладывает плитку на полу своей гостиной размером 12 на 16 метров. Он планирует разместить квадратные плитки размером* 1*м* $\times$ 1*м вдоль границы комнаты, а остальную часть пола выложить квадратными плитками размером* 2*м* $\times$ 2*м. Сколько всего плиток ему понадобится?*

Решение. Отступим от границ гостиной на 1 м. У нас останется прямоугольник размера 10×14, который потребуется покрыть плитками 2×2. Площадь прямоугольника 140, площадь одной плитки 4, значит, понадобится $140 : 4 = 35$ больших плиток. Площадь граничной полосы равна $12 \cdot 16 - 140 = 52$ и она должна быть покрыта плитками площади 1. Значит, потребуется 52 малые плитки. Общее количество плиток равно $35 + 52 = 87$.

Ответ. 87 плиток.

5.2. *Ивановы Иван и Ирина, Мишины Михаил и Мария, Петровы Пётр и Полина хотят переправиться через реку. Есть двухместная лодка. Грести могут Иван, Михаил и Полина. Мужчина не может оставаться на берегу или в лодке наедине с чужой женой. Если семья целиком оказывается на другом берегу, они сразу уходят. Как им всем переправиться на другой берег?*

Решение. Обозначим мужчин большими буквами И, М, П и их женщин и, м, п. Тогда грести могут И, М, п. Покажем схематично процесс переправы:

$$(1)\,\text{и, м, п, П} \xrightarrow{\text{И, М}} (2)$$

$$(1)\,\text{и, м, п, П} \xleftarrow{\text{И}} (2)\,\text{М}$$

$$(1)\,\text{и, И, м} \xrightarrow{\text{п, П}} (2)\,\text{М}$$

$$(1)\,\text{и, И, м} \xleftarrow{\text{М}} (2)$$

$$(1)\,\text{и, м} \xrightarrow{\text{И, М}} (2)$$

$$(1)\,\text{и, м} \xleftarrow{\text{И}} (2)\,\text{М}$$

$$(1)\,\text{м} \xrightarrow{\text{и, И}} (2)\,\text{М}$$

$$(1)\,\text{м} \xleftarrow{\text{М}} (2)$$

$$(1) \xrightarrow{\text{м, М}} (2)$$

5.3. *В десяти коробках лежат мячики:* 1, 3, 5, …, 19 *мячиков. Два друга Пётр и Василий по очереди берут по одному мячику из какой-то коробки. Первым берёт мячик Пётр. Проигрывает тот, после чьего хода в каких-то двух коробках станет* *одинаковое количество мячиков (быть может, нулевое). Кто из них может выиграть вне зависимости от ходов соперника?*

Решение. Пётр выиграет, если будет делать любые допустимые ходы, то есть такие ходы, после которых не возникнет пары коробок с одинаковым числом мячиков. Докажем это. Рассмотрим ситуацию (назовём её *критической*, когда в коробках разное число мячей, но любое взятие мячика приведёт к ситуации, когда в каких-то двух коробках мячей окажется поровну. Ясно, что тогда, во-первых, одна из коробок пустая (иначе можно взять мячик из коробки с наименьшим числом мячиков), во-вторых, для каждой непустой коробки A есть коробка в которой мячиков ровно на 1 меньше (иначе можно взять мячик из A). Итак, в критической ситуации в коробках лежит соответственно 0, 1, $dots$, 9 мячиков, всего 45 штук. Изначально мячиков было чётное число (сумма десяти нечётных чисел), стало нечётным. Значит было взято нечётное число мячиков, и сейчас очередь брать Василия. Он и проигрывает. Ещё отметим, что до этого момента каждый из игроков в свою очередь мог сделать ход, не приводящий его к поражению (выше показано, что критическая ситуация единственна), значит, до этого момента Пётр точно мог не проиграть.

Ответ. Выиграет Пётр.

5.4. *Даниил с Пашей ехали на машине по прямой дороге с постоянной скоростью. Пока Даниил управлял машиной, Паше было нечем заняться, и он рассматривал километровые столбы. Паша заметил, что ровно в полдень они проехали мимо столба с числом XY (где X, Y — некоторые цифры), в $12:42$ — мимо столба с числом YX, а в час дня — мимо столба с числом $X0Y$. С какой скоростью они ехали?*

Решение. Способ 1. За 42 минуты с 12:00 до 12:42 машина проехала не более 100 км, а за оставшиеся 18 минут ещё меньше (в $42/18 = 7/3$) раза. Значит, до столба с числом 200 машина к 13:00 не добралась. Тогда $X = 1$. Тогда, вне зависимости от числа Y, с 12 до часу машина преодолела путь равный 90 км, и её скорость равна 90 км/ч. Остаётся показать, что при такой скорости описанная ситуация возможна, то есть, что условие задачи непротиворечиво. В самом деле: за 42 минуты (что равно 7/10 часа) машина прошла 63 км. И при $Y = 8$ (кстати, такое Y единственно) она как раз окажется напротив столба с номером $63 + 18 = 81$. За оставшиеся до часу дня 18 минут (3/10 часа) машина проедет ещё 27 км и окажется напротив столба с числом $81 + 2 = 108$.

Способ 2. От столба с числом $YX = 10Y + X$ до числа с числом $XY = 10X + Y$ ровно $(10Y + X) - (10X + Y) = 9(Y - X)$ км. Аналогично между столбами с числами XOY и YX ровно $9(11X - Y)$ км. Постоянная скорость машины означает, что участки пройденного ей пути пропорциональны времени, затраченного на их преодоление. Иными словами имеем уравнение $\frac{9(Y-X)}{9(11X-Y)} = \frac{42}{60-42}$. После решения полученной пропорции, получим равенство $Y = 8X$. В цифрах это равенство имеет два решения: $X = Y = 0$, что невозможно, так как первая цифра на километровом столбе от нуля отлична, и $X = 1$, $Y = 8$, что и имело место быть. Тогда за час машина прошла $108 - 18 = 90$ км. Это и есть её скорость.

Ответ. 90 км/ч.

5.5. *На окружности отмечены какие-то 11 красных точек, а внутри окружности — какие-то 11 жёлтых точек. Докажите, что если никакая жёлтая точка не лежит на отрезке, соединяющем две красные, то можно выбрать 5 красных точек так, чтобы они образовывали пятиугольник, внутри которого не более 4 жёлтых точек.*

Решение. Занумеруем красные точки последовательно, двигаясь по часовой стрелке, натуральными числами от 1 до 11. И рассмотрим три таких пятиугольника (указаны только номера их их вершин — красных точек): 1) 1, 2, 3, 4, 5, 2) 1, 5, 6, 7, 8, 1, 8, 9, 10, 11. Легко видеть, что внутренние области пятиугольников общих точек не имеют, поэтому по принципу Дирихле в какой-то из них не более 4 жёлтых, ч. т. д.