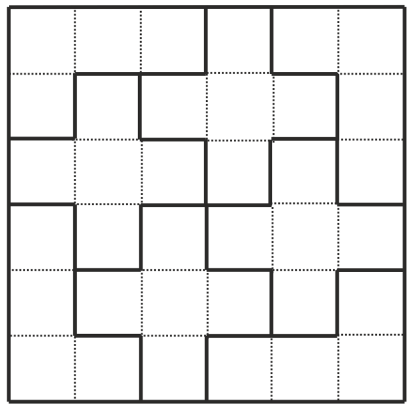
6 класс

6.1. *Можно ли из четырёх пятиклеточных крестов и четырёх четырёхклеточных уголков сложить фигуру, периметр которой меньше 25 клеток? Фигуры нельзя накладывать друг на друга.*

Решение. Можно, например, так:



К решению задачи 6.1

Ответ. Можно.

6.2. *Математики Андрей, Борис и Виктор решали задачи олимпиады. Сначала несколько задач решил Андрей, потом треть от оставшихся задач решил Борис. После этого осталась нерешённой треть задач, которую дорешал Виктор. Какую часть всех задач решил Андрей?*

Решение. Когда Андрей отрешал несколько задач, то Борис прорешал третью часть остатка, а Виктор, соответственно, две трети остатка. Если это, по условию, третья часть всех задач, умножив задачи Виктора на три мы получаем, что удвоенный остаток после Андрея это все задачи олимпиады. То есть, после Андрея осталась половина задач олимпиады. То есть, Андрей отрешал половину всех задач олимпиады.

Ответ. $1/2$.

6.3. *В скачках участвовали три лошади. В букмекерской конторе принимают ставки из расчёта: на победу первой лошади* $4:1$ *(т. е., если первая лошадь побеждает, то игроку возвращают поставленные на нее деньги и еще в четыре раза больше; в противном случае игрок теряет все поставленные деньги), на победу второй —* $3:1$*, на победу третьей —* $1:1$*. Каждая ставка выражается положительным целым числом золотых. У Буратино есть ровно 20 монет. Может ли он сделать такие ставки, чтобы при любом исходе скачек уйти хотя бы с 21 монетой?*

Решение. Чтобы добиться успеха Буратино может действовать так: одну монету оставит себе, а из оставшихся 19 монет поставит 4 монеты на первую лошадь, 5 монет на вторую лошадь и 10 монет – на третью. В случае успеха каждой из лошадей (с учётом коэффициента) он получит по 20 монет, и вместе с одной монетой, которую Буратино не ставил, это сделает возможным его выигрыш.

Ответ. Может.

6.4. *Из пункта А в пункт Б выехали Иван на тракторе и Пётр на «Мерседесе». Пётр доехал до пункта Б, подождал 10 минут и, позвонив Ивану, узнал, что тот проехал только треть пути и сейчас проезжает мимо кафе. Пётр выехал к нему. Не заметив Ивана, он доехал до кафе и, потратив полчаса на перекус, поехал в пункт Б. В итоге Пётр доехал до пункта Б одновременно с Иваном. Сколько времени потратил Иван на весь путь, если и он, и Пётр ехали с постоянными скоростями?*

Решение. Из того, что Иван проехал треть пути к тому моменту, когда Пётр проехал его целиком и подождал 10 минут, можно сделать вывод, что когда Иван доедет до пункта Б, Пётр мог три раза проехать маршрут и подождать полчаса. Вместо этого он проехал маршрут $1+2/3+2/3 = 7/3$ раз и подождал 40 минут. Получается, что для Петра $2/3$ пути в первом соотношении равносильны 10 минутам ожидания во втором. Из этого можно сделать вывод, что весь путь Пётр проезжает за 15 минут, а треть пути Ивана это 25 минут. Соответственно, весь путь Ивана – это 75 минут.

Ответ. 1 час и 15 минут.

6.5. *2023 игрока в Майнкрафт собрались и поделились на два сервера. Раз в минуту кто-то из них огорчался тому, что на его сервере игроков больше, чем на другом, и переходил играть туда. За 2023 минуты каждый игрок сменил сервер только один раз. Сколько людей могло изначально собраться на первом сервере? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.*

Решение. Назовём серверы А и Б. Если какой-то из серверов в начале пуст, то после 1012 перехода он окажется наибольшим, а все, кто ещё не менял сервер – на другом. То есть, оба сервера в начале не пусты. Заметим, что в момент, когда игрок, начинавший играть на сервере А, переходит на сервер Б, на этом сервере собралось не больше, чем 1011 игроков. С этого момента сервер Б не может набрать больше, чем 1012 игроков, потому что в момент, когда он это делает, на нём начинает играть больше человек, чем на сервере А, и оттуда игроки уходить в данный момент больше не могут. Значит, в конце на сервере Б играют не больше 1012 человек, а на сервере А не меньше, чем 1011. Аналогично получаем, что в конце игры на сервере А не больше, чем 1012 человек, а на сервере Б – не меньше 1011. Получается, что единственный возможный случай – это когда в конце игры на одном из серверов собирается 1011 человек, а на другом – 1012. Но каждый участник менял сервер ровно один раз, а это значит, что ситуация начала совпадает с ситуацией конца. То есть, в начале на одном из серверов 1011 человек, а на другом – 1012.

Ответ. 1011 человек или 1012 человек.

6.6 *На доске записаны все натуральные числа от 1 до 50 включительно. Вася выбирает пару чисел на доске, наибольший общий делитель которых больше единицы, и стирает одно из них. Какое наименьшее количество чисел может оставить Вася такими действиями?*

Решение. Оценка. Заметим, что мы не сможем выбрать число 1 ни с каким другим числом в пару, чтобы их НОД был больше одного, поэтому один точно останется на доске. Также заметим, что на доске точно останутся числа 29, 31, 37, 41, 43 и 47. Они простые и больше половины от 50. А значит, все числа, которые на них делятся не написаны на доске. Также на доске должно остаться хотя бы одно число из последней выбранной Васей пары. Как видим, получается уже 8 чисел, которые точно должны остаться на доске.

Пример. Покажем, как стереть с доски все нечётные числа, кроме тех, что описаны в оценке. Сначала сотрём с доски все нечётные составные числа, поставив их в пару с одним из простых делителей этого числа. Затем сотрём все нечётные простые, меньшие 25, поставив их в пару с удвоенным этим числом (оно будет чётным, а потому не будет стёрто к этому моменту). Затем сотрём все чётные числа, поставив их в пару с двойкой. Заметим, что осталось действительно 8 чисел: 1, 2, 29, 31, 37, 41, 43 и 47.

Ответ. 8 чисел.