7 класс

7.1. *Паша записал в тетради равенство, состоящее из целых чисел и знаков арифметических действий. Затем в выражении в левой части равенства он зашифровал каждую цифру и знак действия буквой, заменив одинаковые цифры или знаки одинаковыми буквами, а разные — разными. У него получилось равенство:*

$$ВУЗАКАДЕМ = 2023.$$

Придумайте хотя бы один вариант выражения, которое мог зашифровать Паша. Арифметическими действиями могут быть сложение, вычитание, умножение и деление. Скобки использовать нельзя.

Решение. Есть много способов получить требуемое равенство. Приведём некоторые из них (для полного решения задачи достаточно только одного):

$$0 + 1 \times 7 \times 289$$

$$2065 + 5 - 47$$

$$1963 + 3 \times 20$$

7.2. *Дан четырёхугольник $ABCD$. Его диагонали AC и BD пересекаются внутри четырёхугольника. Эти диагонали делят углы четырёхугольника на две меньшие части, т. е. образуются 8 углов, по два в каждой из вершин четырёхугольника. Могут ли 3 из этих 8 углов оказаться тупыми?*

Решение. Пусть диагонали четырёхугольника пересекаются в точке O. В точке O сходятся две пары вертикальных углов. Два из них — не меньше $90°$, поэтому даже если образованные ими треугольники — тупоугольные, то тупой угол находится не в вершине четырёхугольника. А в двух других треугольниках в сумме не больше двух тупых углов, поэтому 3 из 8 углов не могут быть тупыми.

Ответ. Не могут.

7.3. *В ряд стоят 55 коробок, пронумерованных по порядку числами от 1 до 55. В каждой коробке лежит не более 10 шаров, причём в любых двух соседних коробках количество шаров отличается ровно на 1. Известно, что в коробках с номерами* $1, 4, 7, 10, \ldots, 55$ *лежит суммарно 181 шар. Какое наименьшее количество шаров может быть суммарно во всех 55 коробках?*

Решение. Так как количество шаров в двух соседних коробках отличается на 1, то чётность этого количества всегда отличается. Следовательно, на протяжении всего ряда коробок чётность чередуется — в коробках с номерами разной чётности количество шаров тоже имеет разную чётность. Разобьём коробки на пары: 1 с 4, 7 с 10, 13 с 16, ..., 49 с 52 — всего 9 пар. В каждой паре одно из количеств чётно, другое нечётно. Поэтому в двух коробках одной пары не более $10+9 = 19$ шаров. Тогда в 55 коробке не менее $181 - 19 \cdot 9 = 10$ шаров. Следовательно, условие задачи может быть выполнено лишь в одной ситуации: в 55-й коробке ровно 10 шаров, а в указанных парах — ровно по 19. Более того, коробки с 10 и 9 шаров в парах чередуются. Тогда заметим, что каждый промежуток между указанными коробками может быть лишь двух видов: 9 и 10 шаров либо 8 и 9 шаров. Во втором случае шаров меньше. Считаем минимальное количество шаров: $181 + 18 \cdot (8 + 9) = 487$.

Ответ. 487 шаров.

7.4. *На доске записаны все натуральные числа от 1 до 100 включительно. Вася выбирает пару чисел на доске, наибольший общий делитель которых больше единицы, и стирает одно из них. Какое наименьшее количество чисел может оставить Вася такими действиями?*

Решение. Оценка. Для того, чтобы стереть число, Вася должен найти два числа, в разложении которых на простые множители найдётся хотя бы одно одинаковое простое число. Но тогда не могут быть стёрты единица (нет простых чисел вообще) и простые числа, большие 50 (нет второго числа, которое бы на него делилось). Простые числа, большие 50, это $53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$ — всего 10 чисел. Далее, при стирании одного из чисел в паре, содержащей одинаковое простое число, другое остаётся на доске. Поэтому при последнем стирании должно остаться хотя бы одно число, содержащее простой делитель, меньший 50. Итого не менее 12 чисел останется на доске.

Пример. Вася может действовать следующим образом. Для каждого простого числа, меньшего 50, на доске есть и удвоенное. Поэтому, выбирая простое p в паре с $2p$, Вася может стереть простые числа от 11 до 47, оставив временно 2, 3, 5 и 7. Каждое составное число до 100 включительно имеет простой делитель, меньший 10, поэтому Вася может стереть все составные числа, кроме 6, 10 и 14. Затем Вася может удалить 3, 5 и 7 так же, как и остальные простые числа. Наконец, с помощью числа 2 удалить 6, 10 и 14. В итоге на доске останутся числа $1, 2, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$.

Ответ. 12 чисел.

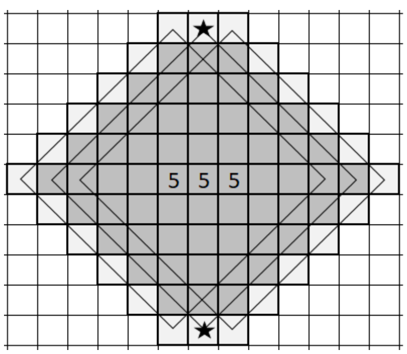
7.5. *Паша играет в компьютерную игру. Игра происходит на бесконечном клетчатом поле. В каждой клетке находится одно из двух: либо сокровище, либо натуральное число. Число показывает расстояние до ближайшего сокровища по клеткам (если до сокровища нужно сделать A шагов по вертикали и B шагов по горизонтали, то в клетке написано число $A + B$). За один ход Паша может узнать содержимое одной клетки. Цель игры — найти хотя бы одно сокровище.*

а) Паша вскрыл три клетки, идущие подряд по горизонтали. В каждой из них оказалось число 5. Какое наименьшее число ходов нужно ещё сделать Паше, чтобы наверняка найти сокровище? *(2 балла)*

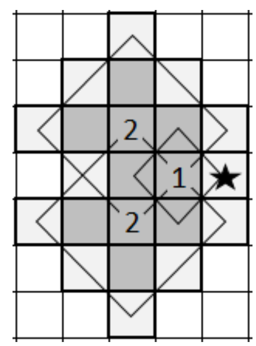
б) Паша вскрыл какие-то три клетки, и в них оказались числа. Могло ли так случиться, что по этой информации Паша может гарантированно найти сокровище следующим ходом? *(3 балла)* *в) Паше известно, что каждое число на поле не превосходит некоторого фиксированного $K \geqslant 3$. Может ли Паша наверняка найти сокровище, сделав не более $K+3$ ходов?* *(4 балла)*

г) Паше известно, что каждое число на поле не превосходит 2023. Хватит ли Паше 20 ходов, чтобы наверняка найти сокровище? *(5 баллов)*

Решение. а) Заметим, что если Паша находит в клетке некоторое число K, то обязательно хотя бы одно сокровище расположено в клетках по периметру квадрата, повёрнутого на 45° относительно сторон линий сетки, вдоль стороны которого ровно $K+1$ клетка. При этом внутри такого квадрата ни одного сокровища быть не может. Построим такие квадраты вокруг найденных Пашей пятёрок. Сокровище, относящееся к центральной пятёрке, может быть расположено только выше или ниже неё на расстоянии 5 клеток, так как остальные клетки периметра будут накрыты другими квадратами. Но одна из этих клеток может не содержать сокровища, поэтому Паше не хватит одного хода, чтобы гарантированно его найти. Для других пятёрок или клеток вне квадратов тоже нельзя однозначно указать, где лежит сокровище. Поэтому Паше нужно хотя бы два хода (эти ходы отмечены звёздочкой на рисунке).



К решению задачи 7.5а

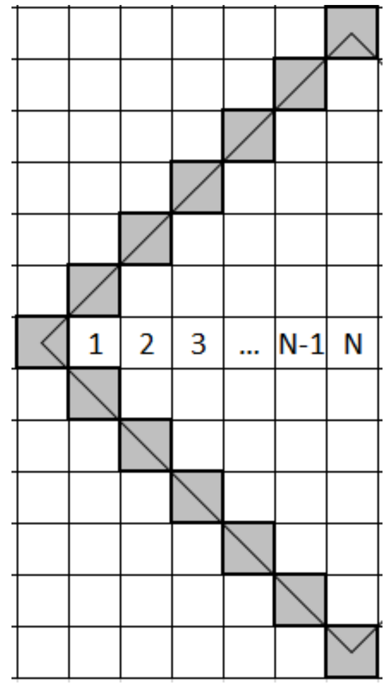


К решению задачи 7.5б

б) На рисунке показана одна из возможных ситуаций, в которой можно однозначно определить положение сокровища. Сокровище находится в клетке, отмеченной звёздочкой, так как другие клетки квадрата вокруг единицы накрыты внутренними клетками квадратов вокруг двоек.

в) Пусть Паша первыми двумя ходами проверит две соседние клетки по горизонтали. Числа, находящиеся в них, либо равны, либо отличаются на 1 (если, конечно, там оказалось сокровище, то Паша справился с задачей). В обоих случаях квадраты вокруг этих двух чисел перекроются так, что сокровище, относящееся к меньшему числу (или любому из равных) будет расположено в клетках, образующих только две стороны квадрата. Пусть меньшим числом будет $N \leqslant K$, и, без ограничения общности, указанные стороны будут слева от него. Ситуация показана на рисунке (размеры квадрата показаны условно).

Следующими ходами Паша будет проверять клетки слева направо, от 1 до максимум $N-1$ — до тех пор, пока число в клетке не совпадёт с номером этой клетки. Если совпадёт 1, то тогда сокровище надо искать в трёх клетках вокруг него, а если не совпадёт, то в этих трёх клетках заведомо нет сокровища. Если совпадёт 2, то сокровище надо искать двумя клетками выше или ниже, а если не совпадёт, то и в этих двух клетках заведомо нет сокровища, и так далее. Если в результате таких действий не совпадёт число ни в одной клетке, в том числе и с номером $N-1$, то сокровище надо искать в последних двух клетках — выше или ниже числа N.



К решению задачи 7.5в

Таким образом, на поиск сокровища Паша потратит: 2 начальных хода, не более $K-1$ хода по горизонтали, 2 хода для нахождения сокровища выше или ниже числа (3 хода, если повезло на первой клетке). Всего $2+(K-1)+2=K+3$ хода. Либо $2+1+3=6$ ходов, но $6 \leqslant K+3$ по условию.

г) Первые два хода сделаем так же, как и в пункте в). Для оставшегося уголка из двух сторон квадрата вокруг числа N сделаем ещё три хода — в его концы и центральную клетку. Если сокровище ещё не найдено, то подозрительными останутся клетки в двух диагональных отрезках, содержащих $N-1 \leqslant 2022$ клеток.

Опишем теперь следующую операцию. Если в таком отрезке выделить $M+1$ подряд идущих клеток, то существует квадрат, для которого выделенные клетки являются стороной. При этом все остальные клетки квадрата лежат строго внутри квадрата со стороной N, полученного первыми двумя ходами, а потому заведомо не содержат сокровища. Тогда Паша может проверить центральную клетку квадрата — если там окажется число M, то среди выделенных $M+1$ клеток сокровище есть, а если не M — то его нет. Для удобства эту операцию будем делать для любого $M \geqslant 0$, причём при $M=0$ квадрат вместе с границей — это просто одна клетка.

С помощью описанной операции Паша сначала оставит один из двух отрезков. Далее будем делить пополам отрезок — выделять половину клеток с одного из краёв (если количество клеток нечётно — половину всех, не считая центральную). Тогда даже в худшем случае ему понадобится ещё не более 12 ходов, так как $2^{11} > 2022$. Действительно, количество непроверенных вариантов за 11 ходов не будет превосходить 1011, 506, 253, 127, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 клеток соответственно. Итого Паша потратит на поиск не более $2+3+1+12=18$ ходов, что даже меньше предложенных двадцати.

Ответ. а) 2 хода; б) Могло.