8 класс

8.1. *Расставьте в таблице 3×3 натуральные числа от 1 до 9 так, чтобы каждое число было использовано по одному разу, а сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце являлась простым числом.*

Решение. Пример расстановки чисел

6	8	9
1	7	3
4	2	5

8.2. *Могут ли числа a, b, c (не обязательное целые) в каком-то порядке совпадать с числами $a+1, b^2+2, c^3+3$?*

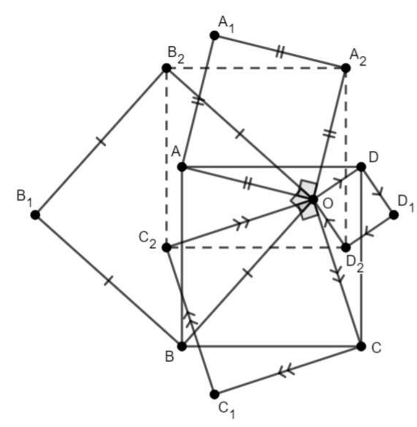
Решение. Пусть M — наибольшее из чисел a, b, c,. Заметим, что M положительное, так как b^2+2 положительное. Очевидно, $M+1 > M$. Покажем, что числа M^2+2 и M^3+3 тоже больше M. Если $M \geqslant 1$, то $M^2+2 > M^2 \geqslant M$ и аналогично $M^3+3 > M^3 \geqslant M$, а если $M < 1$, то $M^2+2 > 1 > M$ и $M^3+3 > 1 > M$. То есть максимальное число в наборе Максима больше M, значит наборы чисел не могли совпасть.

Ответ. Не могли.

8.3. *Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка O. На отрезках AO, BO, CO, DO построили квадраты OAA_1A_2, OBB_1B_2, OCC_1C_2, ODD_1D_2 (все вершины названы в порядке обхода по часовой стрелке). Докажите, что $A_2B_2C_2D_2$ — квадрат.*

Решение. Способ 1.

Рассмотрим треугольники AOB и A_2OB_2. По построению $AO = A_2O$ и $BO = B_2O$. Если углы AOA_2 и BOB_2 имеют общую часть, то $\angle AOB = 90^\circ - \angle AOB_2 = \angle A_2OB_2$, если нет — $\angle AOB = 90^\circ + \angle AOB_2 = \angle A_2OB_2$. Отсюда следует равенство треугольников AOB и A_2OB_2 и $A_2B_2 = AB$. Аналогично доказывается, что $B_2C_2 = BC$, $C_2D_2 = CD$, $D_2A_2 = DA$, то есть $A_2B_2C_2D_2$ — ромб. Докажем равенство треугольников AOC и A_2OC_2. $A_2O = AO$ и $C_2O = CO$ по построению, а также $\angle AOC = 90^\circ + \angle AOC_2 = \angle A_2OC_2$. Равенство треугольников доказано, а значит $A_2C_2 = AC$. Аналогично, $B_2D_2 = BD = AC$, значит в силу равенства диагоналей четырёхугольника $A_2B_2C_2D_2$ получаем, что он является квадратом.



К решению задачи 8.3

Способ 2. При повороте с центром в точке O на 90° по часовой стрелке точки A, B, C, D перейдут в точки A_2, B_2, C_2, D_2 соответственно. Значит квадрат $ABCD$ перейдёт в четырёхугольник $A_2B_2C_2D_2$. Поскольку при повороте сохраняются длины и углы, то $A_2B_2C_2D_2$ — квадрат.

8.4. *Сколькими способами можно расставить по кругу все натуральные числа от 1 до $2n$ так, чтобы каждое число было делителем суммы двух соседних с ним чисел? (Способы, отличающиеся поворотом и симметрией, считаются одинаковыми)*

Решение. Заметим, что если числа в круге не чередуются по чётности, то какие-то два чётных числа стоят рядом. Чётное число является делителем суммы чётного соседнего с ним числа и второго соседнего, значит оно тоже чётное. Продолжая рассуждения далее по кругу, получаем, что все числа в круге чётные, что неверно. Рассмотрим число $2n-1$. По доказанному, оба его соседа являются чётными и их сумма делится на $2n-1$, значит сумма равна хотя бы $4n-2$. Максимальная сумма двух оставшихся чисел равна $2n+(2n-2)=4n-2$. Значит рядом с $2n-1$ стоят числа $2n$ и $2n-2$. Без ограничения общности, пусть они стоят в порядке убывания по часовой стрелке. Теперь и в дальнейшем ситуация будет следующей: по кругу уже расставлены числа от $2n$ до k в порядке убывания по часовой стрелке, где $k>1$. Один из соседей числа k — это $k+1$, а другой сосед не больше $k-1$, то есть сумма соседних чисел больше k и не больше $2k$, значит она равна $2k$. Получается, что следующее число за k — это $k-1$. Снова получили ситуацию, описанную выше. Значит числа стоят по кругу от $2n$ до 1 в порядке убывания по часовой или против часовой стрелки (это одинаковые варианты) и никак больше.

Ответ. 1 вариант.

8.5. *На доске написано положительное рациональное число. Для любых уже написанных чисел a и b (в том числе совпадающих) разрешается выписать на доску числа $a+2b$, ab^2 и a/b^2. Всегда ли получится (возможно, в несколько действий):*

а) выписать число 1, если изначально написано одно нечётное натуральное число? *(2 балла)*

б) выписать число 1, если изначально написано одно чётное натуральное число? *(2 балла)*

в) выписать число 1, если изначально написано одно число? *(3 балла)*

г) выписать число 2, если изначально написано одно число? *(3 балла)*

д) Существует ли такое x, что если на доске написано x, то получится выписать и любое другое положительное рациональное число? *(4 балла)*

Решение. Сначала сделаем одно простое

Наблюдение. Если на доску выписано число x, то для любого нечётного n получится выписать nx.

Для этого достаточно выписывать числа

$$x+2x=3x, 3x+2x=5x, \ldots, (2k-1)x+2x=(2k+1)x,$$

пока не получится nx. Теперь перейдем к решению задачи.

а) Да, это возможно. Обозначим исходное число n. По нашему наблюдению возможно получить n^2, и после этого имеем право выписать $n^2/n^2=1$.

б) Да. Пусть изначально выписано число $x=2^k n$, где k натуральное и n нечётное. Будем действовать так:

I. Выпишем nx;

II. Затем $(nx)/x^2 = \frac{1}{2^k}$;

III. Затем прибавляем к x по $2 \cdot \frac{1}{2^k}$ до тех пор, пока не получим $x + 1$;

IV. Как из нечётного числа $x + 1$ получить единицу, описано в решении пункта а).

в) Да, это тоже возможно. Пусть изначально выписано число $\frac{p}{q}$, где числа p и q натуральные и не имеют общих делителей. В частности, p и q не могут одновременно быть чётными. Возможны два случая:

1. Число q нечётное.

   Тогда наше наблюдение позволяет нам выписать целое (и даже чётное) число $\frac{p}{q} \cdot q^2 = pq$, а как получить из него единицу, описано в решении пункта б);

2. Число q чётное.

   Значит p — нечётное. Выпишем $\frac{p}{q} / \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{q}{p}$. Задача сведена к предыдущему случаю.

г) Нет, не всегда. Пусть изначально выписано число 1. Покажем, что в таком случае все числа, которые мы когда-либо выпишем на доску, представимы в виде отношения двух нечётных чисел. В начальный момент времени это так. Теперь возьмем какие-нибудь $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$, где m, n, p, q нечётные. Легко видеть, что все три числа $\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2$, $\frac{m}{n} / \left(\frac{p}{q}\right)^2$ и $\frac{m}{n} + 2 \cdot \frac{p}{q} = \frac{mq+2pn}{nq}$ снова представимы в виде отношения двух нечётных. Таким образом, мы никогда не получим число 2.

д) Да, например, $x = 2$. В пункте б) описано, как из числа 2 получить единицу. Выпишем также $2/2^2 = \frac{1}{2}$. Прибавив к единице $2 \cdot \frac{1}{2}$ нужное число раз, можем получить любое натуральное число. Наконец, если мы получили pq и q, то далее имеем право выписать $pq/q^2 = \frac{p}{q}$. Таким образом, возможно получить любое положительное рациональное число.