9 класс

9.1. *Найдите наименьшее шестизначное число, кратное 11, у которого сумма первой и четвёртой цифр равна сумме второй и пятой цифр и равна сумме третьей и шестой цифр.*

Решение. Пусть искомое число имеет вид $\overline{1000xy}$, где x, y — некоторые цифры. Тогда по условию сумма первой и четвёртой цифр равна 1, откуда $x = y = 1$. Но число 100011 не кратно 11. Поэтому будем искать число вида $\overline{1001xy}$. Тогда $x = y = 2$, а число 100122 делится на 11.

Ответ. 100122.

9.2. *Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BIC касается прямой AB. Докажите, что эта окружность касается прямой AC.*

Решение. Сразу заметим, что BI и CI — биссектрисы углов треугольника ABC. Обозначим точкой O центр описанной окружности треугольника BIC. Из условия касания следует, что $\angle OBA = 90°$. Пусть $\angle IBA = \angle IB = \beta$, тогда $\angle OBC = 90° - 2\beta$. Треугольник OBC — равнобедренный, а значит $\angle OCB = 90° - 2\beta$ и $\angle BOC = 4\beta$. Треугольник BOI — равнобедренный и $\angle OBA = 90° - \beta$, значит $\angle BOI = 2\beta$. Треугольник COI — равнобедренный и $\angle COI = \angle BOC - \angle BOI = 2\beta$, значит $\angle OCI = 90° - \beta$, $\angle BCI = \angle OCI - \angle OCB = \beta$ и $\angle ACI = \angle BCI = \beta$. Следовательно, $\angle OCA = 90°$ и поэтому AC касается описанной окружности треугольника BIC, что и требовалось доказать.

9.3. *Петя назвал Васе два ненулевых действительных числа x, y и попросил вычислить два новых числа: $x + \frac{1}{y^2}$ и $y^2 + \frac{1}{x}$. Вася всё перепутал и посчитал значения выражений $x^2 + \frac{1}{y}$ и $y + \frac{1}{x^2}$. Тем не менее, результаты получились теми же, только в обратном порядке. Докажите, что Петя назвал Васе два одинаковых числа.*

Решение. Предположим, что $x \neq y$. По условию имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y^2} = y + \frac{1}{x^2}, \\ y^2 + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{y}. \end{cases}$$

Первое уравнение системы перепишем в виде $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$. Так как $x \neq y$, получим $x + y = -\frac{1}{xy}$.

Второе уравнение системы перепишем в виде $x - y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{(y-x)(y+x)}{x^2y^2}$. Так как $x \neq y$, получим $x + y = -x^2y^2$.

В итоге $\frac{1}{xy} = x^2y^2$, то есть $xy = 1$. Подставив в последнее полученное равенство, получим уравнение $x + \frac{1}{x} = -1$, которое не имеет решений. Следовательно $x = y$.

9.4. *Даны набор $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ и набор $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}\}$, являющийся перестановкой набора S. Известно, что для любых $1 \leqslant n, m \leqslant 2022$ выражение $a_n + a_m$ делится нацело на НОД$(n; m)$. Найдите число возможных наборов A.*

Решение. Пусть n и m равны и равны некоторому нечётному числу. Тогда $2a_n \vdots \text{НОД}(n; n) = n$, а значит $a_n \vdots n$. При $n \geqslant 1013$ это выполняется только если $a_n = n$ при $n = \{1013, 1015, \ldots, 2021\}$. Пусть n и m — чётные. Тогда a_n и a_m должны быть одной чётности, а значит все числа $a_2, a_4, \ldots, a_{2022}$ одной чётности, а все числа $a_1, a_3, \ldots, a_{2021}$ — другой чётности. В частности, уже доказано, что a_{2021} — нечётное, поэтому числа $a_1, a_3, \ldots, a_{2021}$ — нечётные, а числа $a_2, a_4, \ldots, a_{2022}$ — чётные. Возьмём максимальное нечётное число k, для которого a_k ещё не определено. По доказанному ранее $a_k \vdots k$, и все нечётные числа, большие k, уже определены, значит $a_k = k$. Продолжая процесс, получим $a_k = k$ при всех нечётных k. Теперь осталось решить задачу для чисел $a_2, a_4, \ldots, a_{2022}$, которые совпадают с набором чисел $2, 4, \ldots, 2022$. Пусть $a_{2n} = 2b_n$ и $a_{2m} = 2b_m$, где $1 \leqslant n,\ m,\ b_n,\ b_m \leqslant 1011$. Тогда $a_{2n} + a_{2m} = 2(b_n + b_m) \vdots \text{НОД}(2n; 2m) = 2\text{НОД}(n; m)$. Значит для любых $1 \leqslant n,\ m,\ b_n,\ b_m \leqslant 1011$ выполнено $b_n + b_m \vdots \text{НОД}(n; m)$. Мы свели задачу к аналогичной, но для набора чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 1011\}$. Повторим аналогичные рассуждения и получим, что $b_k = k$ для всех нечётных k, значит $a_{2k} = 2k$ для всех нечётных k. Теперь осталось определить числа a_k с индексами, кратными четырём. Повторяя процесс многократно, мы дойдём до ситуации, когда остался набор чисел $\{1, 2\}$, а соответствует он числам 2^p и 2^{p-1} таким, что $2^p \leqslant 2022 < 2^{p+1}$, то есть числам a_{512} и a_{1024}.

Случай 1. $a_{512} = 512$, $a_{1024} = 1024$. В таком случае $a_n = n$ при всех $1 \leqslant n \leqslant 2022$. Условие задачи выполняется, так как если НОД$(n; m) = d$, то $n = dx$, $m = dy$ и $a_n + a_m = n + m = d(x + y) \vdots \text{НОД}(n; m) = d$.

Случай 2. $a_{512} = 1024$, $a_{1024} = 512$. Для всех пар n, m, не равных 512 и 1024 и при $n = 512$, $m = 1024$ условие проверено в предыдущем случае. Во всех остальных случаях либо $a_n + 512 = n + 512 \vdots \text{НОД}(n; 1024)$, что верно, так как НОД$(n; 1024) \leqslant 512$, либо $a_n + 1024 = n + 1024 \vdots \text{НОД}(n; 512)$, что верно, так как 1024 кратно 512.

Оба набора чисел подходят.

Ответ. Два набора.

9.5. *Забор Тома Сойера состоит из n досок. Бен Роджерс и Билли Фишер по очереди красят по одной доске, причём Бен красит в красный цвет, а Билли — в синий. Начинает Бен. Если кто-то из мальчиков покрасит две соседние доски, то немедленно будет выгнан купаться, а оставшийся получит серединку от яблока; если же забор полностью окрашен, а такой ситуации так и не случилось, Том оставляет серединку от яблока себе.*

а) Докажите, что если $n = 2022$, то Билли Фишер может избежать участи отправиться купаться. *(3 балла)*

Имеет ли кто-то из мальчишек стратегию, которая позволит ему гарантированно получить серединку от яблока, если:

б) n — нечётное число, большее 10; *(5 баллов)*
в) n — чётное число, большее 10? *(6 баллов)*

Решение. Занумеруем доски забора от 1 до n в порядке от одного края забора до другого.

а) Билли достаточно каждый раз красить доску, противоположную покрашенной Беном (т.е. если Бен красит доску с номером k, то Билли — доску с номером $n+1-k$).

б) Покажем, что такую стратегию имеет Билли. Частичную раскраску забора будем называть *хорошей*, если выполняются все следующие условия:

- покрашено четное число досок (таким образом, очередь красить принадлежит Бену);
- красные и синие доски чередуются;
- одна из крайних досок забора синяя;
- никакие две соседние доски не покрашены в один цвет.

Покажем, что Билли может действовать так, что после каждого его хода раскраска будет хорошей (что, в частности, значит, что Билли не выгонят купаться).

Какую бы доску не покрасил Бен в самом начале, Билли в ответ покрасит одну из крайних досок забора. Очевидно, такая раскраска хорошая.

Теперь заметим, что если (в какой-либо момент времени) раскраска забора хорошая, то в результате хода Бена образуется две красные доски, между которыми нет синих. Если эти две доски соседние, Билли победил, а иначе Билли может покрасить любую доску между ними и снова получить хорошую раскраску.

Покажем, что описанная стратегия принесет Билли серединку от яблока. От противного: пусть забор покрашен полностью и серединка от яблока осталась у Тома, то есть никакие две соседние доски не окрашены в один цвет. Значит, цвета досок чередуются в шахматном порядке. Число n нечетное, значит, Бен покрасил на одну доску больше, но в таком случае обе крайние доски должны быть красные. Противоречие.

Отметим, что указанная стратегия работает для любого нечетного $n > 1$.

в) Покажем, что и в этом случае серединку от яблока получает Билли.

Наблюдение. Пусть в некоторый момент игры получилась хорошая раскраска, которую невозможно продолжить до шахматной. Тогда Билли может продолжить играть по стратегии, описанной в пункте б), и победить.

Сначала предположим, что первым своим ходом Бен покрасил доску с номером k, отличную от двух крайних. Тогда если k четное, то Билли красит доску с номером n, а если нечетное, то с номером 1. Получилась хорошая раскраска, которую невозможно продолжить до шахматной. Значит, по нашему наблюдению Билли побеждает.

Теперь пусть Бен своим первым ходом покрасил одну из крайних досок — без ограничения общности, доску номер 1. Билли в ответ красит доску с номером n. Далее снова возможно два случая:

1. Бен красит любую доску, кроме третьей. Тогда Билли сам красит третью доску и, согласно нашему наблюдению, выигрывает;

2. Бен красит доску номер 3. Тогда Билли красит пятую. Бен своим ходом вынужден покрасить какую-то доску между пятой и n-й, а Билли в ответ красит доску номер 2. Мы опять получили хорошую раскраску, не продолжающуюся до шахматной, и Билли снова побеждает.

Таким образом, Билли выигрывает при любых действиях Бена.

Отметим, что наша стратегия работает для всех чётных $n \geqslant 8$. Оставшиеся неразобранными случаи $n = 1$, 2, 4, 6 мы оставляем заинтересованному читателю.