

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

10 класс

10.1. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^3 > y^2$ и $y^3 > x^2$. Докажите, что $x + y > 2$.

10.2. Рассказывая об однокруговом турнире по шахматам (каждый участник сыграл с каждым по одной партии), комментатор сказал следующее: «В турнире участвовали 15 человек; победитель турнира набрал вдвое больше очков, чем участник, занявший последнее место. Остальные 13 участников набрали одно и тоже промежуточное (между первым и последним) количество очков, поделив, таким образом, места с 2-го по 14-е.» Докажите, что комментатор хоть раз, да ошибся. (В шахматной партии победитель получает одно очко, проигравший — ноль очков, а в случае ничьей оба участника получают по пол-очка.)

10.3. В прямоугольной трапеции $ABCD$ на большей боковой стороне CD нашлась такая точка T , что окружности с диаметрами CT и TD касаются боковой стороны AB каждая. Обозначим точки касания стороны AB окружностями как X и Y . Может ли оказаться, что $AY = BX$? Ответ обоснуйте.

10.4. Квадрат 7×7 разрезали без остатка (по линиям сетки) на трёхклеточные уголки и маленькие квадраты размера 2×2 . Докажите, что маленький квадрат получился ровно один.

10.5. В скачках участвовали три лошади. В букмекерской конторе принимают ставки из расчёта: на победу первой лошади $4 : 1$ (т. е., если первая лошадь побеждает, то игроку возвращают поставленные на нее деньги и еще в четыре раза больше; в противном случае игрок теряет все поставленные деньги), на победу второй — $3 : 1$, на победу третьей — $1 : 1$. Каждая ставка выражается положительным целым числом золотых.

а) Буратино собирается поставить на всех трёх лошадей, но так, чтобы вне зависимости от исхода скачек получить по крайней мере на 2 золотых больше, чем поставил. Подскажите Буратино сколько золотых на какую лошадь поставить, если общая сумма поставленных денег равна 50 золотым. (3 балла)

б) Пьеро желает поставить в сумме ровно 25 золотых, чтобы получить гарантированно хотя бы на 1 золотой больше. Сможет ли он это сделать? (2 балла)

в) Папа Карло намерен сделать такие ставки, чтобы гарантированно получить на 5 золотых больше, чем он поставил. Какую наименьшую сумму денег для этого он должен иметь? (5 баллов)

г) Карабас-Барабас хочет так сделать ставки, чтобы гарантированно получить денег хотя бы на 6% больше, чем поставлено. Сможет ли он это сделать? Денег у Карабаса-Барабаса куры не клюют. (4 балла)