

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

11 класс

11.1. Решите уравнение

$$x^4 + 2x\sqrt{x-1} + 3x^2 - 8x + 4 = 0.$$

11.2. Дан тетраэдр. Обязательно ли найдутся ли четыре параллельные плоскости, проходящие каждая через свою вершину тетраэдра так, чтобы расстояния между любыми соседними плоскостями были одинаковыми?

11.3. Даны различные простые числа p, q, r . Произведение pqr нацело делится на $p + q + r$. Докажите, что $(p-1)(q-1)(r-1) + 1$ является квадратом натурального числа.

11.4. Ньюша имеет 2022 монеты, а Бараш — 2023. Ньюша и Бараш бросают все свои монеты одновременно и считают сколько орлов выпало у каждого. Выигрывает тот из них, у кого окажется орлов больше, а в случае равенства выигрывает Ньюша. С какой вероятностью выигрывает Ньюша?

11.5. Крош, узнав корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, изобрел «золотую систему счисления Кроша», систему счисления с основанием $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Лосяш отметил, что фактически Крош находит разложения положительных чисел на суммы каких-то различных целых степеней числа φ . Например, в этой системе счисления запись 11, 1 соответствует числу

$$1 + \sqrt{5} = \varphi^1 + \varphi^0 + \varphi^{-1}.$$

Лосяш также заявил, что если число имеет разложение, то у него их бесконечно много и всегда можно обойтись разложением, в котором нет пары соседних степеней φ ; само же разложение есть у всех положительных чисел $\frac{m+n\sqrt{5}}{2}$, где m, n — целые и одной четности. Докажите, что Лосяш прав, для чего:

- а) Найдите хотя бы пять различных разложений числа 1. (2 балла)
- б) Докажите, что если число можно разложить в такую сумму, то можно и в сумму, в которой нет пары соседних степеней φ . (2 балла)
- в) Докажите, что если a разложимо, то и $a + 1$ разложимо. (3 балла)
- г) Докажите, что сумма и произведение разложимых чисел также разложимы. (2 балла)
- д) Докажите, что если для каких-то целых m, n одной четности число $\frac{m+n\sqrt{5}}{2}$ положительно, то это число разложимо. (5 баллов)