

XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

8 класс

8.1. Расставьте в таблице 3×3 натуральные числа от 1 до 9 так, чтобы каждое число было использовано по одному разу, а сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце являлась простым числом.

8.2. Могут ли числа a, b, c (не обязательно целые) в каком-то порядке совпадать с числами $a + 1, b^2 + 2, c^3 + 3$?

8.3. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка O . На отрезках AO, BO, CO, DO построили квадраты $OAA_1A_2, OBB_1B_2, OCC_1C_2, ODD_1D_2$ (все вершины названы в порядке обхода по часовой стрелке). Докажите, что $A_2B_2C_2D_2$ — квадрат.

8.4. Сколькими способами можно расставить по кругу все натуральные числа от 1 до $2n$ так, чтобы каждое число было делителем суммы двух соседних с ним чисел? (Способы, отличающиеся поворотом и симметрией, считаются одинаковыми)

8.5. На доске написано положительное рациональное число. Для любых уже написанных чисел a и b (в том числе совпадающих) разрешается выписать на доску числа $a + 2b, ab^2$ и a/b^2 . Всегда ли получится (возможно, в несколько действий):

а) выписать число 1, если изначально написано одно нечётное натуральное число? (2 балла)

б) выписать число 1, если изначально написано одно чётное натуральное число? (2 балла)

в) выписать число 1, если изначально написано одно число? (3 балла)

г) выписать число 2, если изначально написано одно число? (3 балла)

д) Существует ли такое x , что если на доске написано x , то получится выписать и любое другое положительное рациональное число? (4 балла)