XXII ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2023

9 класс

9.1. Найдите наименьшее шестизначное число, кратное 11, у которого сумма первой и четвёртой цифр равна сумме второй и пятой цифр и равна сумме третьей и шестой цифр.

9.2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Описанная окружность треугольника BIC касается прямой AB. Докажите, что эта окружность касается прямой AC.

9.3. Петя назвал Васе два ненулевых действительных числа x, y и попросил вычислить два новых числа: $x + \frac{1}{y^2}$ и $y^2 + \frac{1}{x}$. Вася всё перепутал и посчитал значения выражений $x^2 + \frac{1}{y}$ и $y + \frac{1}{x^2}$. Тем не менее, результаты получились теми же, только в обратном порядке. Докажите, что Петя назвал Васе два одинаковых числа.

9.4. Даны набор $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2022\}$ и набор $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2022}\}$, являющийся перестановкой набора S. Известно, что для любых $1 \leqslant n, m \leqslant 2022$ выражение $a_n + a_m$ делится нацело на НОД$(n; m)$. Найдите число возможных наборов A.

9.5. Забор Тома Сойера состоит из n досок. Бен Роджерс и Билли Фишер по очереди красят по одной доске, причём Бен красит в красный цвет, а Билли — в синий. Начинает Бен. Если кто-то из мальчиков покрасит две соседние доски, то немедленно будет выгнан купаться, а оставшийся получит серединку от яблока; если же забор полностью окрашен, а такой ситуации так и не случилось, Том оставляет серединку от яблока себе.

а) Докажите, что если $n = 2022$, то Билли Фишер может избежать участи отправиться купаться. (3 балла)

Имеет ли кто-то из мальчишек стратегию, которая позволит ему гарантированно получить серединку от яблока, если:

б) n — нечётное число, большее 10; (5 баллов)

в) n — чётное число, большее 10? (6 баллов)