

10-11 класс

10-11.1. Решите систему в действительных числах:

$$\sqrt[4]{3}(a+b+c) = \sqrt{45}, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 45\sqrt{3}, \quad \sqrt[4]{3}(a^3 + b^3 + c^3) = 45\sqrt{15}, \quad a^4 + b^4 + c^4 = 2025.$$

Решение. Отметим, что, взяв $A = \sqrt{45}/\sqrt[4]{3}$, систему можно переписать как $a+b+c = A$, $a^2 + b^2 + c^2 = 3A^2$, $a^3 + b^3 + c^3 = A^3$, $a^4 + b^4 + c^4 = 3A^4$. Значит в качестве решения подойдут любые a, b, c , равные по модулю A , если ровно два из них положительны. Итак, найдены указанные в ответе решения. Докажем, что других нет.

Способ 1. Из второго и четвертого уравнения системы среднее арифметическое чисел a^2, b^2, c^2 , равное A^2 , совпадает со среднеквадратическим тех же чисел. Значит все a^2, b^2, c^2 равны. Если бы a, b, c совпадали, то из первого уравнения $a = A/3$, откуда в силу третьего $A = A^3/9$. Так как $0 \neq A^2 \neq 9$, числа a, b, c не совпадают. В силу положительности A , положительных среди a, b, c больше, то есть ровно два. Это даёт в точности ответ выше.

Способ 2. То же можно показать, не используя четвёртого уравнения. Сначала заметим, что все a, b, c не могут равняться A одновременно. Пусть, например, c не равно A . Тогда из первого и третьего уравнений $a+b = A-c \neq 0$ и $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = (A-c)(A^2 + Ac + c^2)$, откуда $a^2 - ab + b^2 = A^2 + Ac + c^2$. Умножая полученное на два и группируя, получаем $3(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = A^2 + c^2 + (A+c)^2$, что даёт $3(a^2 + b^2) - (A-c)^2 = A^2 + c^2 + (A+c)^2$. Раскрывая скобки, имеем $3(a^2 + b^2) - A^2 - c^2 = 2A^2 + 2c^2$, то есть $a^2 + b^2 = A^2 + c^2$.

Теперь, воспользовавшись вторым уравнением, имеем $3A^2 - c^2 = a^2 + b^2 = A^2 + c^2$ и $A^2 = c^2$, что в силу $A \neq c$ означает $c = -A$. Подставляя это в первые два уравнения, получаем $a+b = 2A$ и $a^2 + b^2 = 2A^2$, откуда $(a+b)^2 = 4A^2$, $2ab = 2A^2$, $(a-b)^2 = 0$ и $a = b = A$.

Ответ. $(a, b, c) = (-\sqrt{45}/\sqrt[4]{3}, \sqrt{45}/\sqrt[4]{3}, \sqrt{45}/\sqrt[4]{3})$,
 $(a, b, c) = (\sqrt{45}/\sqrt[4]{3}, -\sqrt{45}/\sqrt[4]{3}, \sqrt{45}/\sqrt[4]{3})$,
 $(a, b, c) = (\sqrt{45}/\sqrt[4]{3}, \sqrt{45}/\sqrt[4]{3}, -\sqrt{45}/\sqrt[4]{3})$.

10-11.2. На рисунке справа изображены 11 подобных шестиугольников. Шесть из них — А, Б, В, Г, Д, Ц — не пересекаются, а остальные пять — ДЦ, ГДЦ, ВГДЦ, БВГДЦ, АБВГДЦ — являются объединениями этих шести.

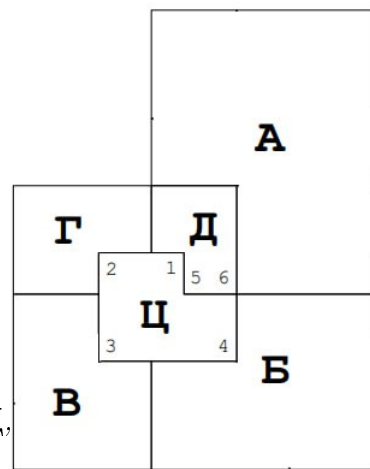


Рисунок был специально искажён, отрезки в нем были чуть повернуты и растянуты, но это не мешает считать, что в каждом из этих шестиугольников один угол больше развернутого, а остальные — меньше. Докажите, что а) в шестиугольнике Ц все углы, кроме одного, прямые; б) левые стороны шестиугольников А и Б лежат на одной прямой.

Решение. Заметим, в каждом из этих шестиугольников все углы, кроме одного — меньше развернутого. Значит угол больше развернутого одинаков у всех них. Рассматривая такие углы в шестиугольниках Б, В, Г, Д, видим, что четыре угла у Ц, а именно $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$, равны. Сравнивая угол $\angle 6$ с соответствующим ему углом в Ц (то есть то ли с $\angle 2$, то ли с

$\angle 4$), видим, что $\angle 2 = \angle 4$ равен $\angle 6$. Теперь, раз уж правые стороны у **Ц** и у **Д** являются общей стороной шестиугольника **ДУЦ**, то равные углы $\angle 4$ и $\angle 6$ являются соответственными. Значит три стороны у **Ц** параллельны, что, в силу $\angle 2 = \angle 3$, означает равенство всех этих шести углов 90° . Итак, пункт а) доказан. Показано также, что через одну стороны шестиугольников параллельны.

Для доказательства пункта б) отметим, что объединение **АУБ** (как результат вычитания **ВУГУДУЦ** из **АУБУВУГУДУЦ**) подобно объединению **ВУГ** (результата вычитания **ДУЦ** из **ВУГУДУЦ**). Более того, по той же причине, и размеры в **А** и **Б** больше размеров в **В** и **Г**. Значит в какое-то количество раз больше был бы и зазор у прямых, содержащих левые стороны **А** и **Б** по сравнению с зазором между прямыми, содержащими правые стороны **В** и **Г**. Поскольку эти зазоры совпали, ведь **А** и **Г** имеют общую точку, то зазор равен нулю, то есть найдется прямая, которая содержит стороны всех этих шестиугольников (**А**, **Б**, **В**, **Г** (а на самом деле еще и **Д**)).

Примечание. Легко заметить, что такой шестиугольник можно разрезать на самоподобные части. Он является единственным с таким свойством многоугольником с числом сторон больше четырёх. Про этот шестиугольник, шестиугольник Амманна, и построение апериодических паркетов на его основе, можно почитать, например, в статье Александра Шеня с соавторами.

10-11.3. Даны какие-то действительные числа a, b, c, d . Известно, что сумма $a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x + d \cos 4x$ неотрицательна при любом действительном x . Найдите a, b, c, d .

Первое решение. Пусть $f(x) = a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x + d \cos 4x$. Теперь из $f(x) + f(\pi - x) \geq 0$ следует $g(x) = d \cos 4x + b \cos 2x \geq 0$. Сложим $g(x) \geq 0$ с неравенством $g(\frac{\pi}{2} - x) \geq 0$. Получим $d \cos 4x \geq 0$. Но косинус принимает любые знаки. Значит $d = 0$. Подставляя в g , получаем $g(x) = b \cos 2x \geq 0$, откуда $b = 0$. Тогда $f(x) = a \cos x + c \cos 3x$. В точках $x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$ получаем два неотрицательных числа $f(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}) = \pm(c - a)\sqrt{2}/2$, то есть $a = c$ и неотрицательна функция $f(x) = a(\cos x + \cos 3x)$. Подставляя $x = 0$ и $x = \pi$, получаем неотрицательность $\pm a$, то есть a также зануляется. Итак, все коэффициенты равны нулю.

Второе решение. Заметим, что $a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x + d \cos 4x$ является производной функции $a \sin x + \frac{b}{2} \sin 2x + \frac{c}{3} \sin 3x + \frac{d}{4} \sin 4x$. Эта функция не убывает, так как её производная неотрицательна. Поскольку эта функция равна нулю в точках 0 и 2π , значит во всех точках равна нулю и она, и её производная. Итак, при любых x

$$12a \sin x + 6b \sin 2x + 4c \sin 3x + 3d \sin 4x = 0, \quad a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x + d \cos 4x = 0.$$

Подставляя $\pi/2$ в первое и 0 во второе, получаем $a - 4c = 0$, $a + b + c + d = 0$. Подставляя $\pi/2$ в первое и 0 во второе, получаем $12a - 4c = 0$, $a + b + c + d = 0$. Подставляя туда же $\pi/4$ и π , имеем $(12a + 4c)\sqrt{2}/2 = 0$ и $a - c + b - d = 0$. Из $12a - 4c = 0$ и $(12a + 4c)\sqrt{2}/2 = 0$ следует, что $a = c = 0$. Теперь $b + d = a + b + c + d = 0$ вместе с $b - d = a - c + b - d = 0$ дают $b = d = 0$.

Ответ. $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$.

Примечание. Эта задача о линейной независимости тригонометрических мономов, более удобных для практики, чем x^n . На этой независимости основана масса вычислительных методов, от ряда Фурье до самых современных и востребованных. Оставим общий случай этой задачи (линейная независимость всех тригонометрических мономов: $\sin x, \cos x$,

$\sin 2x, \cos 2x, \dots$) как упражнение пытливому читателю. Тем более, что основную идею этого решения, равно как и основную нужную аналогию, мы уже написали выше...

10-11.4. Дана замкнутая несамопересекающаяся ломаная в пространстве. Известно, что нет плоскости, которая содержала бы её всю. Верно ли, что всегда найдется не содержащая ни одного её звена плоскость, которая разрежет эту ломаную а) не меньше, чем на четыре части; б) ровно на четыре части?

Решение. Будем отрезки ломаной называть *звеньями*, а концы звеньев — *вершинами*. Натянем на ломаную выпуклую оболочку (минимальный по объёму выпуклый многогранник, содержащий все её вершины, максимальный по объёму многогранник с вершинами среди вершин ломаной). Это выпуклый многогранник. Обозначим какую-то его вершину через A . Она является и вершиной ломаной, из неё выходит два звена, но из нее выходит хотя бы три ребра многогранника. Тогда найдётся ребро, которое звеном не является. Обозначим его через AA_0 . Как через A , так и через A_0 , проходит ровно по два звена, обозначим их через BA, AC, B_0A_0, A_0C_0 (при этом не исключены совпадения $B = B_0$ и $C = C_0$). Пусть r — самое маленькое расстояние от A, A_0 до других вершин ломаной. Отложим на AB, AC отрезки AD, AE длиной $r/4$ каждый. Теперь точка A_0 на плоскости A_0DE , A — по одну её сторону, а все остальные вершины ломаной — по другую. Пусть s — самое маленькое расстояние от плоскости A_0DE до отличных от A_0 вершин ломаной. Отложим на A_0C_0 отрезок A_0F длиной $s/4$. Теперь точки A, A_0 по одну сторону от плоскости FCD , а все остальные вершины ломаной — по другую. Ну тогда эта плоскость может пересечь только звенья, идущие от A и A_0 к остальным вершинам, таких звеньев ровно четыре (BA, AC, B_0A_0, A_0C_0). Плоскость пересекла замкнутую ломаную ровно в четырёх точках, значит разделила её ровно на четыре куска. Два из них (вместе с A и A_0) по одну её сторону, два — по другую. Что и требовалось.

Примечание. Задачу можно решать и принципиально по-другому. В одной из серьёзных монографий встречалось решение, к примеру, и через чебышёвские радиусы. Впрочем, тригонометрических полиномов в той книге было гораздо больше.

10-11.5. Даны натуральные числа a, b и простое число d такие, что $a^2 + b^2$ делится на d и числа a и b взаимно просты. Докажите, что для каких-то натуральных $k, i < d$

а) из того, что Na^2 и Nb^2 делятся на d для какого-то натурального N , следует, что и N делится на d ; (2 балла)

б) число $k^2a^2 - i^2b^2$ тоже делится на d ; (5 баллов)

в) число $k^2 + i^2$ делится на d ; (3 балла)

г) выполнено $k^2 + i^2 = d$. (4 балла)

Решение. Докажем все пункты для случая, когда d не является полным квадратом.

а) Отметим, что поскольку a, b взаимно просты, d можно представить в виде $d = d_0d_ad_b$, где d_a и d_b — наибольшие общие делители пары d, a^2 и пары d, b^2 соответственно. При этом d_0 взаимно просто и с a , и с b . Если Na^2 и Nb^2 делятся на $d = d_0d_ad_b$, то N обязано делиться и

на $d_b d_0$, и на $d_a d_0$. Поскольку d_a и d_b взаимнопросты вслед за a и b , N делится и на $d = d_b d_a d_0$, что и требовалось.

б) Возьмем натуральное $M > 1$ так, что $M^2 > d > (M-1)^2$. Выпишем остатки от деления на d чисел $ka + ib$ для всех пар (k, i) натуральных чисел, не больших M . В силу $M^2 > d$ по принципу Дирихле найдется два одинаковых остатка для различных пар $(k_1, i_1), (k_2, i_2)$. Значит $(k_1 - k_2)a + (i_1 - i_2)b$ делится на d . Тогда на d делится и

$$|k_1 - k_2|^2 a^2 - |i_1 - i_2|^2 b^2 = ((k_1 - k_2)a + (i_1 - i_2)b)((k_1 - k_2)a - (i_1 - i_2)b).$$

Поскольку $|k_1 - k_2|^2, |i_1 - i_2|^2$ не больше $(M-1)^2 < d$, то их и можно взять в качестве k^2, i^2 , если показать, что ни одно из них не ноль. Сделаем это. Одновременно k, i в ноль обратиться не могут, поскольку были выбраны различные пары $(k_1, i_1), (k_2, i_2)$. Если же одно из них оказалось бы равно нулю, пусть i , то на d делилось бы ka , а значит и ka^2, kb^2 . Теперь из пункта а) с $N = k$ следовало бы, что $N = k$ делится на d , но в силу показанного выше $k^2 < d$ это давало бы $k^2 < d \leq k$, что невозможно. Значит, $k, i \neq 0$.

в) По пункту б) для каких-то натуральных $k, i < d$ число $k^2 a^2 - i^2 b^2$ делится на d , по условию $i^2(a^2 + b^2)$ и $k^2(a^2 + b^2)$ тоже делятся на d . Теперь и сумма $k^2 a^2 + i^2 a^2 = (k^2 + i^2)a^2$, и разность $-i^2 b^2 - k^2 b^2 = -(k^2 + i^2)b^2$ делятся на d . Применяя пункт а) с $N = k^2 + i^2$, получаем, что $k^2 + i^2$ делится на d .

г) Повторим доказательство пункта б), заметив лишь дополнительно, что $k^2 = |k_1 - k_2|^2, i^2 = |i_1 - i_2|^2$ не больше $(M-1)^2 < d$, то есть $k^2 + i^2 \leq d - 1 + d - 1 < 2d$. Повторим доказательство пункта в), убедившись лишь, что натуральное число $k^2 + i^2$, которое делится на d , всё ещё меньше $2d$. Значит оно равно d .

Примечание. Формулировка пункта г) найдена в Журнале элементарной математики, т.2, №13, 18. Решение изложенное там, конструктивно, не требует особых знаний, но крайне громоздко своими алгебраическими выкладками. Идея изложенного здесь доказательства восходит к Лагранжу. Подробнее, и про доказательство Лагранжа, и про числа, представимые в виде суммы квадратов, можно посмотреть, например, в Кванте, №3, 1999, стр.22.