

РЕШЕНИЯ

9 класс

9.1. В ряд записали числа: сначала все нечётные от 1 до 2025 (по возрастанию), а затем все чётные от 2024 до 2 (по убыванию). Сколько чисел делятся на номер своей позиции в этом ряду?

Решение. При $1 \leq k \leq 1013$ член последовательности под номером k равен $2k - 1$, а при $1014 \leq k \leq 2025$ — равен $2026 - 2 \cdot (k - 1013) = 4052 - 2k$. Число $2k - 1$ делится на k только при $k = 1$. Если $4052 - 2k$ делится на k , то k — делитель числа $4052 = 2^2 \cdot 1013$, больший 1013. Поскольку число 1013 простое, наименьший возможный делитель равен 2026, что невозможно.

Ответ. Одно.

9.2. Заяц и черепаха устроили забег по круговой тропинке. Они стартуют одновременно из одной точки в одном направлении, каждый — со своей постоянной скоростью. Заяц быстрее черепахи. Каждый раз, когда заяц и черепаха встречались в одной точке, черепаха мгновенно разворачивалась и с той же постоянной скоростью двигалась в противоположном направлении. Когда черепаха впервые вернулась на точку старта, заяц встретил её в 209-ый раз. Во сколько раз скорость зайца больше скорости черепахи?

Решение. Примем длину тропинки за 1 км. Пусть скорость зайца в k раз больше. Тогда если скорость черепахи равна v км/ч, скорость зайца равна kv км/ч. Из условия следует, что 105 обгонов произошло, когда черепаха ползла по направлению движения зайца, а 104 обгона — когда она ползла в противоположном направлении. Через каждые два обгона черепаха проползает в направлении бега зайца расстояние

$$v \cdot \left(\frac{1}{kv - v} - \frac{1}{kv + v} \right) = \frac{2}{k^2 - 1}$$

км. Значит весь круг она проползёт, когда проползёт расстояние

$$104 \cdot \frac{2}{k^2 - 1} + v \cdot \frac{1}{kv - v} = \frac{208}{k^2 - 1} + \frac{1}{k - 1} = \frac{209 + k}{k^2 - 1}.$$

Решив уравнение $1 = \frac{209+k}{k^2-1}$, получим единственный положительный корень $k = 15$.

Ответ. В 15 раз.

9.3. Даны положительные числа a и b . Известно, что существует треугольник со сторонами $1, a, 2a^2$ и существует треугольник со сторонами $1, b, 2b^2$. Докажите, что существует треугольник со сторонами a, b, ab .

Решение. Из неравенства треугольника следует, в частности, что $1 + a > 2a^2$ и $2a^2 + a > 1$. Первое неравенство перепишем в виде $(a - 1)(2a + 1) < 0$, а второе — в виде $(a + 1)(2a - 1) > 0$. Оба неравенства верны лишь в случае $\frac{1}{2} < a < 1$. Аналогично, $\frac{1}{2} < b < 1$. Неравенство $a + b >$

ab верно, поскольку $ab < a < a + b$. Докажем, что $a + ab > b$. $a + ab = a(b + 1) > \frac{b+1}{2} > \frac{b+b}{2} = b$. Неравенство $b + ab > a$ доказывается аналогично.

9.4. а) Дима решил покрасить некоторые клетки бесконечной во все стороны клетчатой доски в три цвета — красный, синий, зелёный. Он хочет, чтобы в каждой горизонтальной полоске 1×3 была хотя бы одна красная клетка, в каждой вертикальной полоске 1×3 была хотя бы одна синяя клетка, а в каждом квадрате 2×2 была хотя бы одна зелёная клетка. Докажите, что на раскрашенной по таким правилам бесконечной клетчатой доске не будет незакрашенных клеток. (3 балла)

б) Теперь Дима взял квадрат 30×30 и решил покрасить какие-то его клетки в красный, синий и зелёный цвета так, чтобы в этом квадрате выполнялись условия, описанные выше. Может ли он осуществить эту задачу, не покрасив ровно 75 клеток? (4 балла)

Решение. Любой квадрат 3×3 можно разбить на три горизонтальные или на три вертикальные полоски. Поэтому в каждом таком квадрате хотя бы три красных и хотя бы три синих клетки.

а) Предположим, что есть незакрашенная клетка. Возьмём квадрат 3×3 с центром в этой клетке. По доказанному ранее, в таком квадрате не может быть более двух зелёных клеток. Этот квадрат содержит четыре квадрата 2×2 , а любая зелёная клетка содержится одновременно не более, чем в двух указанных квадратах 2×2 . Значит обе клетки содержатся ровно в двух квадратах 2×2 , значит они стоят не в углах. Если они расположены в соседних сторонах квадрата 3×3 , то они содержатся только в трёх квадратах 2×2 . Значит они стоят в противоположных сторонах. Но тогда в этом квадрате либо средний столбец не содержит синих клеток, либо средняя строка не содержит красных клеток — противоречие. Значит все клетки покрашены.

б) Квадрат 30×30 разбивается на 300 горизонтальных полосок, на 300 вертикальных полосок или на 225 квадратов 2×2 . Это означает, что незакрашенных клеток не более 75, при этом их может быть ровно 75 только в случае, когда в каждой горизонтальной полоске ровно одна красная клетка, в каждой вертикальной — ровно одна синяя клетка, а в каждом квадрате 2×2 ровно одна зелёная клетка. Из пункта а) мы понимаем, что незакрашенные клетки могут быть только на границе квадрата. Неугловых незакрашенных клеток хотя бы 71, тогда по принципу Дирихле на какой-то стороне квадрата 30×30 есть хотя бы 18 незакрашенных среди 28 неугловых клеток. Так как $18 \cdot 2 > 28$, то найдутся две соседние незакрашенные клетки. Рассмотрим эти две клетки и пусть они находятся в верхней строке. Рассмотрим квадрат 2×2 , содержащий выбранные незакрашенные клетки. В этом квадрате есть зелёная клетка. Без ограничения общности, пусть она под правой незакрашенной клеткой. Рассмотрим квадрат 3×3 , в котором незакрашенная клетка и зелёная клетка под ней находятся в самом правом столбце. Внутри этого квадрата левый верхний квадрат 2×2 содержит зелёную клетку. Мы нашли квадрат 3×3 , в котором хотя бы две незакрашенные и хотя бы две зелёные клетки, значит в нём нет трёх красных или трёх синих клеток — противоречие.

9.5. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC ($AB > AC$) проведены высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 , точка M — середина стороны BC , точки B_2 и C_2 — середины высот

BB_1 и CC_1 соответственно, не совпадающие с точкой пересечения высот ABC . Точка P — основание перпендикуляра, проведённого из вершины A к прямой B_1C_1 .

а) Докажите, что $\angle A_1AC = \angle PAC_1$; (2 балла)

б) Докажите, что точки M, A_1, B_2, C_2 лежат на одной окружности; (2 балла)

в) Пусть точка X симметрична точке B относительно точки A_1 , а точка Y — симметрична точка B_1 относительно точки P . Докажите, что треугольники AB_1X и ABY равны; (3 балла)

г) Докажите, что точки A_1 и P симметричны относительно прямой B_2C_2 ; (4 балла)

д) Докажите, что треугольник PB_2C_2 подобен треугольнику ABC . (3 балла)

Решение. а) Четырёхугольник BCB_1C_1 вписанный, так как на BC опираются прямые углы BB_1C и CC_1B . Значит $\angle AC_1P = \angle ACB$, из чего следует подобие треугольников PAC_1 и A_1AC и требуемое равенство углов.

б) Пусть H — ортоцентр ABC . Отрезки MB_2 и MC_2 являются средними линиями соответственно треугольников BB_1C и CC_1B , а значит $\angle MB_2B_1 = \angle MC_2C_1 = 90^\circ$. Точки A_1, B_2, C_2 лежат на окружности с диаметром MH .

в) Из пункта а) $\angle BAP = 90^\circ - \angle AC_1P = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAA_1$. Пусть $\angle BAP = \angle CAA_1 = \alpha$ и $\angle PAA_1 = \beta$. Из симметрии следует равнобедренность треугольников ABX и AB_1Y , в которых высоты AA_1 и AP являются биссектрисами, а значит $\angle XAC = \angle BAA_1 - \angle A_1AC = \beta$ и $\angle YAC_1 = \angle PAB_1 - \angle PAC_1 = \beta$. Треугольники AB_1X и ABY равны по двум сторонам и углу между ними.

г) По построению, B_2P и B_2C — средние линии в треугольниках BB_1Y и BB_1X , значит $B_2P = \frac{1}{2}BY$, $B_2A_1 = \frac{1}{2}B_1X$. Из доказанного в пункте в) равенства треугольников следует, что $B_1X = BY$, а значит $B_2P = B_2A_1$. Аналогично доказывается, что $C_2P = C_2A_1$. Для этого нужно симметрию точки C относительно A_1 и симметрию точки C_1 относительно P и повторить рассуждения из пункта в). Из этого следует равенство треугольников PB_2C_2 и $A_1B_2C_2$, а также симметрия A_1 и P относительно B_2 и C_2 .

д) В силу пункта г) достаточно доказать подобие треугольников ABC и $A_1B_2C_2$. Из $AB > AC$ следует, что M лежит между A_1 и B , а B_2 — между H и B . Из доказанной в пункте б) вписанности следует, что $\angle A_1B_2C_2 = \angle A_1MC_2 = \angle A_1BC_1 = \angle ABC$. Из той же вписанности, вне зависимости от положения точки C_2 следует $\angle B_2A_1C_2 = \angle B_2HC_1 = 90^\circ - \angle HBA = \angle BAC$. Подобие по двум углам доказано.

