

XXIV ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

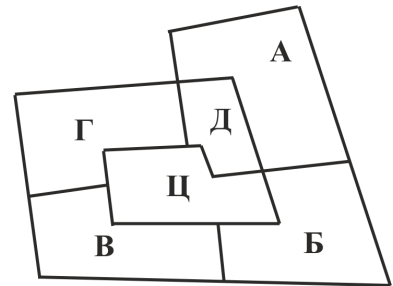
Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2025

10-11 класс

10-11.1. Решите систему в действительных числах:

$$\sqrt[4]{3}(a+b+c) = \sqrt{45}, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 45\sqrt{3}, \quad \sqrt[4]{3}(a^3 + b^3 + c^3) = 45\sqrt{15}, \quad a^4 + b^4 + c^4 = 2025.$$

10-11.2. На рисунке справа изображены 11 подобных шестиугольников. Шесть из них — **А**, **Б**, **В**, **Г**, **Д**, **Ц** — не пересекаются, а остальные пять — **ДУЦ**, **ГУДУЦ**, **ВУГУДУЦ**, **БУВУГУДУЦ**, **АУБУВУГУДУЦ** — являются объединениями этих шести. Рисунок был специально искажён, отрезки в нем были чуть повёрнуты и растянуты, но это не мешает считать, что в каждом из этих шестиугольников один угол больше развернутого, а остальные — меньше. Докажите, что а) в шестиугольнике **Ц** все углы, кроме одного, прямые; б) левые стороны шестиугольников **А** и **Б** лежат на одной прямой.



10-11.3. Даны какие-то действительные числа a, b, c, d . Известно, что сумма $a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x + d \cos 4x$ неотрицательна при любом действительном x . Найдите a, b, c, d .

10-11.4. Дана замкнутая несамопересекающаяся ломаная в пространстве. Известно, что нет плоскости, которая содержала бы её всю. Верно ли, что всегда найдется не содержащая ни одного её звена плоскость, которая разрежет эту ломаную а) не меньше, чем на четыре части; б) ровно на четыре части?

10-11.5. Даны натуральные числа a, b и простое число d такие, что $a^2 + b^2$ делится на d и числа a и b взаимно просты. Докажите, что для каких-то натуральных $k, i < d$

а) из того, что Na^2 и Nb^2 делятся на d для какого-то натурального N , следует, что и N делится на d ; (2 балла)

б) число $k^2a^2 - i^2b^2$ тоже делится на d ; (5 баллов)

в) число $k^2 + i^2$ делится на d ; (3 балла)

г) выполнено $k^2 + i^2 = d$. (4 балла)