

XXIV ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2025

9 класс

9.1. В ряд записали числа: сначала все нечётные от 1 до 2025 (по возрастанию), а затем все чётные от 2024 до 2 (по убыванию). Сколько чисел делятся на номер своей позиции в этом ряду?

9.2. Заяц и черепаха устроили забег по круговой тропинке. Они стартуют одновременно из одной точки в одном направлении, каждый — со своей постоянной скоростью. Заяц быстрее черепахи. Каждый раз, когда заяц и черепаха встречались в одной точке, черепаха мгновенно разворачивалась и с той же постоянной скоростью двигалась в противоположном направлении. Когда черепаха впервые вернулась на точку старта, заяц встретил её в 209-ый раз. Во сколько раз скорость зайца больше скорости черепахи?

9.3. Даны положительные числа a и b . Известно, что существует треугольник со сторонами $1, a, 2a^2$ и существует треугольник со сторонами $1, b, 2b^2$. Докажите, что существует треугольник со сторонами a, b, ab .

9.4. а) Дима решил покрасить некоторые клетки бесконечной во все стороны клетчатой доски в три цвета — красный, синий, зелёный. Он хочет, чтобы в каждой горизонтальной полоске 1×3 была хотя бы одна красная клетка, в каждой вертикальной полоске 1×3 была хотя бы одна синяя клетка, а в каждом квадрате 2×2 была хотя бы одна зелёная клетка. Докажите, что на раскрашенной по таким правилам бесконечной клетчатой доске не будет незакрашенных клеток. (3 балла)

б) Теперь Дима взял квадрат 30×30 и решил покрасить какие-то его клетки в красный, синий и зелёный цвета так, чтобы в этом квадрате выполнялись условия, описанные выше. Может ли он осуществить эту задачу, не покрасив ровно 75 клеток? (4 балла)

9.5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC ($AB > AC$) проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 , точка M — середина стороны BC , точки B_2 и C_2 — середины высот BB_1 и CC_1 соответственно, не совпадающие с точкой пересечения высот ABC . Точка P — основание перпендикуляра, проведённого из вершины A к прямой B_1C_1 .

а) Докажите, что $\angle A_1AC = \angle PAC_1$; (2 балла)

б) Докажите, что точки M, A_1, B_2, C_2 лежат на одной окружности; (2 балла)

в) Пусть точка X симметрична точке B относительно точки A_1 , а точка Y — симметрична точке B_1 относительно точки P . Докажите, что треугольники AB_1X и ABY равны; (3 балла)

г) Докажите, что точки A_1 и P симметричны относительно прямой B_2C_2 ; (4 балла)

д) Докажите, что треугольник PB_2C_2 подобен треугольнику ABC . (3 балла)