

10-11 класс

10-11.1. 20 игроков играли в пейнтбол. У каждого было по 7 шариков с краской. В конце все отстреляли все шарики. В Андрея попали 10 раз, а в Вову попало меньше шариков, чем во всех остальных. Насколько много шариков могли попасть в Вову, если ни один шарик не попал в двух и более игроков.

Решение. Оценка. В 19 игроков, не считая Андрея, было сделано суммарно 130 попаданий. Если в Вову попали 6 или более раз, то в оставшихся 18 игроков попали хотя бы по 7 раз, и суммарное число попаданий было бы не меньше $6 + 18 \cdot 7 = 132$. Значит в Вову попали не более 5 раз.

Пример. Возьмём кроме Андрея и Вовы ещё двух человек — пусть это Боря и Гоша. Пусть Андрей попал 7 раз в Борю, Боря — 7 раз в Андрея, Вова — 1 раз в Андрея и 6 раз в Гошу, а Гоша — 2 раза в Андрея и 5 раз в Вову. Остальных игроков разобьём на две группы по 8 человек. В этих группах каждый из игроков попал по одному разу в оставшихся 7 игроков в той же группе.

Ответ. 5 раз.

10-11.2. Дано натуральное число $n > 1$. Пусть $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_k = n$ — все натуральные делители числа n . Оказалось, что $n = (d_2 - d_1)(d_3 - d_2) \dots (d_k - d_{k-1})$. Найдите все возможные значения числа n .

Решение. Если $d_2 \neq 2$, то у n все делители нечётны. Однако тогда $d_2 - d_1$ — чётное число, и на него делится n — противоречие. Значит $d_2 = 2$ и $d_{k-1} = \frac{n}{2}$, откуда $(d_2 - d_1)(d_k - d_{k-1}) = \frac{n}{2}$. Это значит, что среди оставшихся пар соседних делителей ровно одна пара отличается на 2, а остальные могут отличаться только на 1. Рассмотрим случаи.

1) Пусть $d_3 = 4$. Если $d_{k-1} = d_3$, то больше делителей нет и $n = 8$. Иначе $d_{k-1} - d_{k-2} = \frac{n}{2} - \frac{n}{4} = \frac{n}{4} = 1$, откуда $n = 4$. Легко проверить, что это число не подходит.

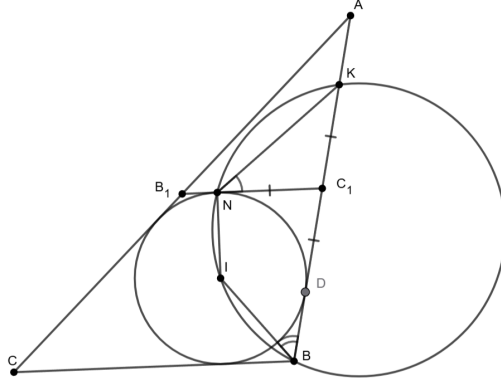
2) Пусть $d_3 = 3$. Если $d_{k-1} - d_{k-2} = \frac{n}{2} - \frac{n}{3} = \frac{n}{6} = 1$, то $n = 6$, что также не подходит. Значит $\frac{n}{6} = 2$, откуда получаем $n = 12$. Это число подходит.

Ответ. 8, 12.

10-11.3. В треугольнике ABC точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB соответственно. Вписанная окружность треугольника ABC с центром в точке I касается отрезка B_1C_1 в точке N . Описанная окружность треугольника BIN пересекает вторично сторону AB в точке K . Докажите, что точки C, N, K лежат на одной прямой.

Решение. Обозначим длины сторон $BC = 2a, AC = 2b, AB = 2c$. Пусть D — точка касания вписанной окружности со стороной AB . Тогда $BC_1 = c, CB_1 = b$ и $BD = \frac{AB + BC - AC}{2} = a + c - b$ и $C_1D = BC_1 - BD = b - a$. Из вписанности окружности в BCB_1C_1 следует, что $B_1C_1 + BC = CB_1 + BC_1$, откуда $3a = b + c$. Пусть $\angle ABC = 2\beta$, тогда из вписанности $BINK$ получаем $\angle KNC_1 = 180^\circ - \angle ABI - \angle INC_1 = 90^\circ - \beta$. B_1C_1 — средняя

линия ABC , значит $\angle KC_1N = 2\beta$, из чего получаем $\angle NKC_1 = 180^\circ - \angle KC_1N - \angle KNC_1 = 90^\circ - \beta = \angle KNC_1$. Тогда $KC_1 = C_1N$ по доказанной равнобедренности KC_1N и $C_1N = C_1D$ как отрезки касательных. Отсюда $KB = BC_1 + C_1D = b - a + c = 2a = BC$. Треугольники KC_1N и KBC — равнобедренные с общей вершиной и параллельными сторонам, значит точки C, N, K лежат на одной прямой.



10-11.4. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_n$ ($n > 3$) — конечная возрастающая геометрическая прогрессия, знаменатель которой — натуральное число. Известно, что все члены этой прогрессии можно разбить на k ($k \geq 3$) множеств так, что суммы чисел b_i , попавших в эти множества, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите все возможные пары (n, k) .

Решение. Пусть $M_1, M_2, \dots, M_k$ — суммы чисел в соответствующих множествах, взятые в порядке возрастания. Можно считать, что $b_1 = 1$ (иначе разделим все члены на b_1 , при этом любые их суммы также уменьшатся в b_1 раз, поэтому сохранится свойство сумм образовывать арифметическую прогрессию). Пусть $q \in \mathbb{N}$ — знаменатель прогрессии. Заметим, что теперь все её члены, кроме первого, кратны q , а поэтому все M_i , кроме одного (суммы чисел множества, содержащего $b_1 = 1$), также делятся на q нацело. Значит, если $k \geq 4$, то есть числа M_i и M_{i+1} , кратные q . Тогда разность арифметической прогрессии тоже кратна q , и все её члены без исключения кратны q . Противоречие. Итак, $k = 3$.

При $q \geq 2$ каждый член геометрической прогрессии больше, чем сумма всех её членов с меньшими номерами. Поэтому b_n лежит в кучке с максимальной суммой, с суммой M_3 . Так как $M_3 = 2M_2 - M_1 < 2M_2$, $b_n < 2M_2$ и, тем более $b_n < 2(b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) = 2 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

(напомним, что мы считаем $b_1 = 1$). Имеем неравенство $q^{n-1} < 2 \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$, которое равносильно условию $q^n < 3q^{n-1} - 2$. Значит, $q^n < 3q^{n-1}$, откуда $q < 3$. Так как q — натуральное, а прогрессия возрастающая, $q = 2$.

Сумма всех членов прогрессии с одной стороны, равна $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, а с другой $M_1 + M_2 + M_3 = 3M_2$. Так как число M_2 целое, число $2^n - 1$ кратно 3. Это равносильно тому, что число n — чётно.

Покажем, что при всех чётных $n > 3$ прогрессию $1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}$ можно разложить в три кучки, суммы чисел в которых образуют арифметическую прогрессию. Действительно,

в этом случае число $M_2 = \frac{2^n - 1}{3}$ — целое. Запишем его в двоичной системе счисления и получим, что оно представляется в виде суммы различных натуральных степеней числа 2 (меньших, чем 2^{n-1}). Именно эти числа и образуют среднее множество. Остальные карточки можно распределить произвольно в две остальные кучки: кучка, в которой окажется число 2^{n_1} будет иметь некоторую сумму $S > M_2$, сумма чисел во второй кучке окажется равной $3M_2 - M_2 - S = 2M_2 - S < M_2$. Осталось заметить, что числа $2M_2 - S$, M_2 и S образуют арифметическую прогрессию с разностью $S - M_2$.

Ответ. $k = 3$, n — любое чётное число, не равное 2.

10-11.5. В стране n городов и k авиакомпаний ($n > k$). Некоторые города связаны односторонними авиалиниями. Известно, что из каждого города выходит ровно одна авиалиния каждой авиакомпании и в каждый город ведёт ровно одна авиалиния каждой из k компаний. В стране есть Жулик, который летает на самолётах только одной из авиакомпаний (но неизвестно какой), и есть Детектив, который пытается его поймать. Каждый день, рано утром, Детектив один раз может позвонить шерифу одного из n городов и попросить проверить, находится ли преступник в его городе. В случае положительного ответа Жулика ловят. В случае отрицательного ответа вечером того же дня Жулик совершает перелёт из одного города в другой. Из города нельзя перелететь в тот же город.

а) Предположим, что Детективу неизвестно, как устроены авиалинии и каким авиакомпаниям они принадлежат. Сможет ли он поймать Жулика за конечное число дней? (2 балла)

б) Детективу всё ещё неизвестно, как устроены авиалинии и каким авиакомпаниям они принадлежат. Предположим также, что для любой выбранной компании Жулик сможет за несколько дней попасть из любого города в любой, пользуясь авиалиниями этой компании. За какое наименьшее число вопросов Детектив гарантированно поймает Жулика? (2 балла)

в) В первый день поиска Жулика, до того, как Детектив успел выбрать город, в который будет звонить, ему принесли карту, на которой указаны все авиалинии и каким авиакомпаниям они принадлежат. Пусть $k = 2$. Докажите, что для поимки Жулика Детективу достаточно $\lceil \frac{3n}{2} \rceil$ дней. (4 балла)

г) Верно ли, что существует бесконечно много пар (n, k) натуральных чисел, для которых маршруты авиакомпаний могут быть устроены так, что даже глядя на карту, Детектив не сможет поймать Жулика в течение n дней? (6 баллов)

Решение. а) Из условия следует, что маршруты любой авиакомпании образуют несколько циклов (возможно, один) и Жулик перемещается по одному из этих циклов. Количество городов в каждом цикле не больше чем n . Следовательно, для каждого города верно одно из двух следующих утверждений. 1) Жулик посещает этот город не реже, чем раз в n дней. 2) Жулик никогда не бывает в этом городе. Детектив звонит n дней подряд Шерифу одного из городов и либо ловит Жулика, либо убеждается, что он в этом городе не бывает. Тогда

Детектив звонит n дней подряд Шерифу другого города и. т. д. Не позже, чем через n^2 дней Жулик будет пойман.

б) Из предположения следует, что Жулик в течение n дней точно побывает во всех городах. Значит, действуя, как в пункте «а», Детектив поймает Жулика не позже, чем за эти n дней. Покажем, что более быструю поимку гарантировать нельзя. Можно считать, что каждая компания имеет ровно n самолётов, которые перелетают в следующий город один раз в сутки (вечером). Тогда Жулик постоянно летает одним и тем же самолётом, можно считать, что он из него просто не выходит. Любой звонок Детектива позволяет проверить каждый день ровно по одному самолёту каждой из компаний на наличие в нём Жулика. Поэтому за m звонков ($m < n$) будет проверено не более m самолётов каждой из компаний и нельзя быть уверенным, что Жулик не окажется в одном из $k(n - m)$ оставшихся самолётов.

в) Как и в пункте «б» будем считать, что Жулик безвылазно находится в одном из самолётов. Видя карту, Детектив в любой день точно знает, где сейчас находятся непроверенные им самолёты. Он будет звонить Шерифу одного из тех городов, в которых таких непроверенных самолётов возможно больше. Так как компаний две, то в каждом городе всегда ровно два самолёта, поэтому больше двух самолётов в день Детектив проверить не может. Пока непроверенных самолётов в сумме больше, чем n , по принципу Дирихле всегда найдётся город, в котором таких самолётов 2. Значит, в течение $n/2$ дней в случае чётного числа n и в течение $(n + 1)/2$ дней в случае нечётного Детектив сможет проверять по 2 самолёта. Возможно, что в дальнейшем ему не удастся проверять по два самолёта в день, поэтому для гарантированной поимки Жулика ему понадобится ещё столько дней, сколько самолётов осталось. При n чётном останется n самолётов, и Детектив потратит ровно $(n/2) + n = (3n)/2$ дней. При n нечётном останется $n - 1$ самолёт, и общее количество дней будет равным $(n + 1)/2 + (n - 1) = (3n - 1)/2$. Остаётся заметить, что

$$\left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil = \begin{cases} (3n)/2, & \text{если } n = 2m, \\ (3n - 1)/2, & \text{если } n = 2m + 1. \end{cases}$$

г) Это верно. Например, годятся все пары, где n — чётное число, не меньшее 4, а $k = n - 1$. Построим для каждой такой пары схему маршрутов, удовлетворяющих условию задачи, следующим образом. Разобьём города на $n/2$ пар, и пусть маршруты первой компании соединяют города внутри каждой такой пары (один маршрут туда, второй обратно). Теперь разобьём города на пары другим способом, маршруты второй компании пусть соединяют города внутри вновь созданных пар. Разобьём города на пары третьим способом — аналогично определим маршруты третьей компании, и так $n - 1$ раз. Для корректности процесса нам, конечно, требуется иметь $n - 1$ разбиение на пары такие, что каждая из возможных пар городов попадает ровно в одно разбиение. Их можно выбрать так: $n - 1$ город мысленно поставить в вершины правильного $(n - 1)$ -угольника, а один в его центр. Все разбиения имеют такой вид: центральный город O ставится в паре с какой-нибудь вершиной A , остальные города-вершины разбиваются на пары симметричных относительно прямой OA . Итак, маршруты авиакомпаний определены.

Покажем, что Жулик не ловится в течение n дней. Как и раньше, считаем, что Жулик летает одним и тем же самолётом (в нашем примере туда — сюда по каким-то двум городам), а звонок Детектива проверяет все k самолётов, находящихся в городе, в который совершён

звонок. Заметим, что если какие-то m рейсов любой из авиакомпаний образуют цикл, то для гарантированной поимки Жулика Детектив обязан позвонить в города этого цикла не менее, чем m раз: каждым звонком Детектив проверяет не более одного самолёта (данной компании), летающего по этому циклу. В частности, отсюда следует, что менее, чем за n дней поймать Жулика не удастся, даже если Детективу будет известна компания, самолётами которой тот летает. Пусть Детектив сделал какие-то $n - 3$ звонка, и пока Жулика не вычислил. Тогда найдутся три города, в которые он ещё не звонил — города A , B и C . Тогда про самолёты, летающие внутри треугольника ABC , Детективу пока ничего неизвестно, Жулик может быть в любом из них. Будем считать, что он там и находится. Тогда Детективу нужно за три звонка проверить все 6 рейсов. Без ограничения общности считаем, что следующий звонок сделан в город A и получен отрицательный ответ. На утро следующего дня не проверены 4 самолёта, два из которых сейчас находятся в городе A (один летает по городам A и B , второй — A и C), и по одному в городах B и C . Проверить два из них можно только позвонив в город A . Пусть снова ответ отрицательный. Тогда ясно, что Жулик на одном из двух самолётов, летающих между городами B и C . Так как эти самолёты сейчас разных городах, за один оставшийся звонок детектив проверить оба не сможет.

Ответ. а) сможет; б) за n дней при любом k ; г) верно.