

7 класс

7.1. Что больше: произведение всех двузначных чисел или сумма всех десятизначных?

Решение. Все десятизначные числа меньше 10^{10} и их количество меньше 10^{10} , поэтому сумма — меньше 10^{20} . Все двузначные числа не меньше 10, а их количество равно 90, поэтому произведение — не меньше 10^{90} .

Ответ. Произведение двузначных.

7.2. Вдоль прямой дороги слева направо расположены пункты A, B, C, D, E . Кратчайший путь, начинающийся в B и проходящий через все пункты, имеет длину 3200 метров. Аналогичный путь, начинающийся в C или в D , будет иметь длину 3500 метров. Известно, что расстояние от A до B на 400 метров больше, чем от B до C . Найдите расстояние от C до D .

Решение. Кратчайший путь со стартом в каком-то из некрайних пунктов должен пройти сначала через один из крайних, затем через другой. Таким образом, любой путь по длине не меньше расстояния от старта до края плюс расстояние между крайними пунктами — именно такой путь и будет кратчайшим. Заметим, что путь из C не может начинаться вправо, так как $CE + AE > DE + AE$, но кратчайшие пути из C и D имеют одинаковую длину. Значит, путь из C — влево, а из D — вправо. А так как путь из B короче, чем из D , то из B — тоже влево. Теперь можно найти длины отрезков: $BC = (AC + AE) - (AB + AE) = 3500 - 3200 = 300$ м, $AB = BC + 400 = 700$ м. $AE = (AB + AE) - AB = 3200 - 700 = 2500$ м. $DE = (DE + AE) - AE = 3500 - 2500 = 1000$ м, и, наконец, $CD = AE - AB - BC - DE = 3500 - 700 - 300 - 1000 = 500$ м.

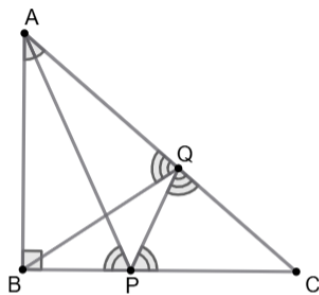
Ответ. 500 метров.

7.3. Паутинка имеет форму квадрата 6×6 клеток. Все углы клеток назовём узелками. В центральном узелке паутинки расположен домик паука Аркадия, в котором он сейчас сидит. Во всех остальных узелках прилипло по мухе. Аркадий может переместиться из одного узелка в другой вдоль диагонали одной клетки (но не стороны!). Какое наибольшее число мух может собрать Аркадий из паутинки, если он не хочет проходить один и тот же узелок дважды, а в конце пути хочет снова оказаться в своём домике?

Решение. Раскрасим все 49 узелков в шахматном порядке в красный и синий цвет. Пусть углы большого квадрата будут красным. В красном узелке будет и домик Аркадия. Легко заметить, что переползая по диагонали клетки, Аркадий всегда будет оставаться в красных узелках. Аркадий не может достигнуть углов большого квадрата, так как при следующем переползании он вернётся в узелок, в котором уже был. Остальные красные узелки раскрасим в белый и чёрный цвета, как показано на рисунке. В любом маршруте Аркадия белые и чёрные узелки будут чередоваться. Следовательно, Аркадий посетит поровну белых и чёрных узелков (домик считаем белым узелком). Всего белых — 9, чёрных — 12, поэтому наибольшее количество мух равно $9 + 9 - 1 = 17$, так как домик — не муха.



Решение. Заметим, что $\angle QPC = \angle APB = 90^\circ - \angle BAP = 90^\circ - \angle PAC$, из чего следует, что $\angle PQC = 180^\circ - \angle QPC - \angle ACP = 90^\circ + (\angle PAC - \angle ACP)$. Заметим, что угол PQC должен быть острым, иначе после второго отражения шара (в точке Q) он бы полетел в ту полуплоскость относительно PQ , в которой лежит точка C . Но тогда бы он не попал в B . Это означает, что разность углов в скобках отрицательная. Следовательно, $\angle PAC < \angle ACP$. В треугольнике ACP напротив большего угла лежит большая сторона, значит, $PC < AP$, что и требовалось доказать.



а) Нет дополнительных условий. (2 балла)

б) Девять чисел не превосходят 2, а десятое число — нечётное. (3 балла)

в) В наборе есть числа 1, 2, 3 и 4 хотя бы одному разу, остальные могут отличаться. (4 балла)

г) Первое число не превосходит 1, второе — не превосходит 2, третье — не превосходит 3, и так далее, до десятого числа, которое не превосходит 10. (5 баллов)

Решение. а) Не всегда. Например, подойдёт набор чисел 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3. Сумма чисел равна 28. Поэтому нужно разбивать на суммы, равные 14. Но одна из сумм будет заведомо делиться на 3.

б) Всегда. Среди девяти чисел нечётное число единиц. Объединим их в пары и будем считать, что это просто двойки. Останется одна лишняя единица. Пусть сумма всех чисел равна $2k$. Заметим, что она не меньше удвоенного десятого числа, так как сумма первых 9 чисел не меньше 9. Но тогда можно получить k из десятого числа, некоторого количества двоек и, возможно, единицы. Сумма остальных чисел тоже будет равна k .

в) Всегда. Расположим 6 остальных чисел в порядке возрастания. Далее, также в порядке возрастания, будем распределять их по двум группам, каждый раз определяя число в группу с меньшей суммой, а если суммы равны, то в любую из них. В частности, сначала группы пусты, и меньшее число пойдёт в любую из групп. В результате 6 чисел будут разбиты на группы, разность сумм в которых не превосходит наибольшего числа в наборе, то есть не превосходит 10. С другой стороны, эта разность чётна, так как $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ — чётное число, следовательно, сумма рассматриваемых 6 чисел тоже чётна, а чётное число может быть разбито только на два слагаемых одинаковой чётности. Значит, эта разность равна 0, 2, 4, 6, 8 или 10. Любую из этих разностей можно получить первыми четырьмя гирями: $(1 + 4) - (2 + 3) = 0$, $(1 + 2 + 3) - (4) = 2$, $(1 + 2 + 4) - (3) = 4$, $(1 + 3 + 4) - (2) = 6$, $(2 + 3 + 4) - (1) = 8$, $(1 + 2 + 3 + 4) - (0) = 10$. Получив соответствующую разность, уравниваем суммы.

г) **Первое решение.** Заметим, что такой набор чисел удовлетворяет ещё одному условию: каждое число не превосходит суммы всех чисел с меньшим номером плюс 1 (*). Тогда воспользуемся алгоритмом, похожим на тот, что использовался в предыдущем пункте. Будем брать числа по уменьшению их номера и определять в группу с меньшей суммой (при равенстве сумм — в любую группу). Тот момент, когда группа, в которой сумма больше, меняется, назовём критическим. Также критическим моментом будем считать ситуацию, в которой суммы становятся или перестают быть равными. Заметим, что в критический момент разность двух сумм не превосходит последнего рассмотренного числа. Далее мы будем определять числа в меньшую группу, и, в силу (*), должно произойти одно из двух — либо ещё один критический момент, либо числа закончатся, а суммы будут отличаться на 1. Однако вторая ситуация противоречит условию задачи, т.к. общая сумма чисел была бы нечётной. Следовательно, числа закончатся в критический момент. Но так как последнее число равно 1, то суммы чисел в группах отличаются не больше чем на 1. Опять же, в силу чётности — суммы в группах равны.

Второе решение. Будем вести индукцию по количеству чисел. Количество чисел равно n . Необходимо решить задачу при $n = 10$. Обозначим числа за $a_1, \dots, a_n$. Условие на числа: $1 \leq a_k \leq k$, а ещё $a_1 + \dots + a_k$ — чётно. Докажем утверждение: можно расставить плюсы и минусы между числами так, чтобы значение выражения равнялось 0. База индукции: $n = 1$. Выполнить условия на числа невозможно. $n = 2$. Есть ровно 1 набор чисел: $a_1 = a_2 = 1$. Тогда искомое выражение $a_1 - a_2 = 0$. Предположим, что такое выражение можно сделать при любом $n < k$. Теперь рассмотрим набор чисел $a_1, \dots, a_k$. Заметим, что модуль разности

двух последних чисел не больше $k - 1$. Тогда сделаем новый набор: 1) если эта разность равна 0, то просто уберём 2 последних числа — сумма в наборе останется чётной. Тогда из чисел $a_1, \dots, a_{k-2}$ можно сделать требуемое выражение и добавить к нему $+a_{k-1} - a_k$. 2) если эта разность натуральна, то она имеет ту же чётность, что и сумма $a_{k-1} + a_k$. Тогда уберём 2 последних числа и вместо предпоследнего поставим эту разность — условия по-прежнему будут выполнены. Из полученных чисел, по предположению, можно получить 0. Теперь вместо последнего числа в ней подставим разность и раскроем модуль — требуемое выражение получено и для k чисел. Утверждение доказано. Следовательно, между 10 числами можно расставить плюсы и минусы так, чтобы получилось 0. А, значит, можно разбить на 2 одинаковые суммы.

Ответ. а) Не всегда; б, в, г) Всегда.