

8 класс

8.1. Вдоль круговой дорожки по часовой стрелке стоят флажки A, B, C, D . Толя начал беговую тренировку от флажка A и там же её закончил. Во время бега он несколько раз разворачивался и бежал в противоположную сторону. Все развороты происходили рядом с флажками. Известно, что рядом с каждым из флажков A, B, D он побывал ровно по 5 раз (в это число включены начало и конец пути). Сколько раз он мог побывать рядом с флажком C ? Укажите все варианты ответа и докажите, что других нет.

Решение. Каждый нечётный раз он рядом с A или C , каждый чётный — рядом с B или D . Так как начало и конец пути — флажок A , общее количество A и C на 1 больше, чем B и D . Следовательно, рядом с C Толя побывал ровно 6 раз. Для этого он мог пробежать в порядке $ABCBCBCBCBCDCDADADADA$.

Ответ. 6 раз.

8.2. Коленька любит порядок. Вечером он свои игрушки раскладывает по коробочкам, коробочки — по ящикам, ящики — в шкаф. Няня Коленьки внимательно следит, как Коленька разложил игрушки. В один из дней няня заметила, что Коленька использовал больше коробочек, чем суммарное количество игрушек в любом ящике. Докажите, что в этот день Коленька использовал больше ящиков, чем количество игрушек хотя бы в одной из коробочек. Некоторые коробочки или ящики могут быть пустыми.

Решение. Пусть у Коленьки N игрушек, и он использовал A коробочек и B ящиков. Тогда в каком-то ящике оказалось не меньше N/B игрушек, и, по условию, $A > N/B$. Тогда $AB > N$. При этом, по принципу Дирихле, в какой-то коробочке количество игрушек не превосходит N/A , а из неравенства выше следует, что $B > N/A$.

8.3. Действительные числа x, y, z таковы, что выполняются равенства

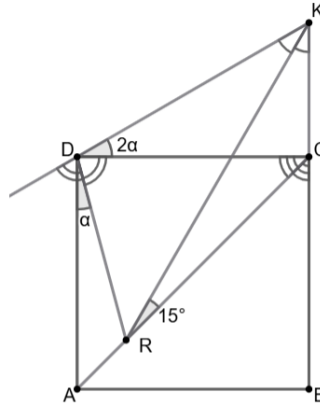
$$x^3 - xy + y^3 = y^3 - yz + z^3 = z^3 - zx + x^3.$$

Докажите, что среди чисел x, y, z есть равные друг другу.

Решение. Допустим, что нет равных чисел среди x, y, z . Из равенства $x^3 - xy + y^3 = y^3 - yz + z^3$ получаем $y(z - x) = z^3 - x^3$, что даёт равенство $y = z^2 + zx + x^2$. Можно преобразовать данное выражение в виде $y = \frac{1}{2}(x^2 + z^2 + (x + z)^2)$, откуда следует, что $y \geq 0$. Аналогично получаем, что $x = y^2 + yz + z^2$ и $z = x^2 + xy + y^2$, причём $x, z \geq 0$. Далее, вычтем выражения для x и y друг из друга. Получится $x - y = y^2 - x^2 + z(y - x)$, откуда $(y - x)(1 + x + y + z) = 0$. Однако обе эти скобки не равны нулю, так как числа не равны друг другу и положительны. Противоречие. Следовательно, среди чисел x, y, z есть равные.

8.4. На продолжении стороны BC за точку C и на диагонали AC квадрата $ABCD$ выбраны точки K и R соответственно. Угол CDK в два раза больше угла RDA . Угол CRK равен 15° . Найдите DK/CK .

Решение. Заметим, что $\angle CDR = 90^\circ - \angle ADR = 90^\circ - \frac{\angle CDK}{2} = \frac{180^\circ - \angle CDK}{2}$, поэтому DR — биссектриса внешнего угла треугольника CDK . Луч CR — биссектриса прямого угла — внешнего угла треугольника CDK . Тогда точка R — точка пересечения внешних биссектрис (центр вневписанной окружности), следовательно, луч KR содержит биссектрису угла CKD . При этом $\angle CKR = \angle ACB - \angle CRK = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, и тогда $\angle CKD = 60^\circ$, $\angle CDK = 30^\circ$. Катет напротив угла 30° вдвое меньше гипотенузы, поэтому $DK/CK = 2$.



Ответ. $DK/CK = 2$.

8.5. Многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и все его углы равны. Вершины правильного n -угольника белые. Два игрока, Петя и Вася, играют в следующую игру. Они по очереди выбирают одну из белых вершин и красят её в чёрный цвет. Начинает Петя. Проигрывает тот игрок, после хода которого можно будет найти несколько чёрных вершин, образующих правильный многоугольник (количество углов в котором может быть меньше n). Кто из игроков, Петя или Вася, может выиграть вне зависимости от действий противника, если:

- а) $n = 13$? (2 балла)
- б) $n = 2026$? (2 балла)
- в) $n = 3039$? (5 баллов)
- г) $n = 36$? (5 баллов)

Решение. а) Выиграет второй игрок. Заметим, что и правильный n -угольник, и правильный k -угольник вписываются в одну и ту же окружность. Равные стороны будут стягивать равные дуги. Поскольку n -угольник разбил окружность на равные дуги, стороны k -угольника будут стягивать одинаковое количество таких дуг. Из этого следует, что n делится на k . Это утверждение будет дальше использоваться во всех пунктах. Теперь перейдём к описанию стратегии Васи. 13 — простое число, поэтому ни один правильный многоугольник не возникнет, пока не будет сделано 13 ходов. А 13-й ход делает Петя.

б) Выиграет второй игрок. Так как $n = 2 \cdot 1013$, а число 1013 — простое, то игроки могут получить лишь 1013- и 2026-угольники. Но если 2026-угольник получен, то получен и 1013-угольник. Поэтому цель Васи — не завершить ни один из двух 1013-угольников раньше

Пети. Для этого ему нужно лишь не делать последний ход в них. Это может продолжаться максимум 2024 хода (и последний ход как раз за Васей), а на 2025 ходу Петя всё равно проиграет, если не сделал этого раньше.

в) Выиграет второй игрок. Заметим, что $n = 3 \cdot 1013$, и теперь можно получить 3-, 1013- и 3039-угольник. При этом достаточно следить лишь за треугольниками и 1013-угольниками. Кроме того, три вершины треугольника принадлежат трём разным 1013-угольникам (если бы 2 из них принадлежали одному 1013-угольнику, то и третья бы принадлежала — но тогда 1013 делилось бы на 3). Теперь переходим к стратегии Васм. Пусть после каждого хода Пети Вася всегда выбирает вершину того же треугольника. Тогда Петя обязан будет выбирать новый треугольник каждым ходом, так как иначе получит полностью чёрный треугольник. При этом у Васи всегда есть выбор из двух вершин треугольника, а, значит, и выбор, вершину какого из двух разных 1013-угольников он покрасит. Ситуация, когда Вася проигрывает, покрасив любую из двух белых вершин треугольника, выглядит так: в соответствующих им 1013-угольниках уже покрашено по 1012 вершин, а Петя только что сходил в третий 1013-угольник. Это значит, что уже сделано не менее 2025 ходов, следовательно, игроки разыгрывают последний треугольник — ведь на 2027 ходу Петя заведомо проигрывает. Таким образом, Вася должен не допустить только эту ситуацию. Для этого Васе достаточно сделать так, чтобы за первые 4 хода появились покрашенные вершины во всех трёх 1013-угольниках (тогда вышеописанный сценарий проигрыша Васи будет невозможен): за первый ход Петя и Вася покрасят по вершине в двух из трёх 1013-угольников, за второй ход, если этого не сделает Петя, то Вася всегда может покрасить вершину в третьем.

г) Выиграет второй игрок. В этом пункте можно получать 3-, 4-, 6-, 9-, 12-, 18- и 36-угольники. Однако каждый из таких многоугольников содержит в себе треугольник или квадрат, поэтому треугольник или квадрат появится первым. Следовательно, достаточно следить за треугольниками и квадратами. Заметим, что если треугольник и квадрат имеют общую вершину, то все их вершины — это вершины некоторого правильного 12-угольника, а любой другой треугольник или квадрат, пересекающийся с ними по вершинам, так же относится к этому 12-угольнику. Следовательно, Васе нужно выиграть в каждом из трёх 12-угольников (т.е. оставить проигрышный ход за Петей). Стратегия Васи для 12-угольника такая же, как и для 3039-угольника: он каждым ходом выбирает одну из вершин того треугольника, в который только что сходил Петя. И ему нужно так же не допустить единственной проигрышной ситуации, когда оба варианта хода заканчивают соответствующие квадраты: эта ситуация может произойти лишь после 7-го хода, т.е. при розыгрыше последнего треугольника. Как и в предыдущем пункте, Вася может избежать этого сценария на первых ходах.

Ответ. Во всех пунктах выиграет второй игрок.