

9 класс

9.1. Вовочка выписал все десятизначные числа, которые делятся на 6 и в записи которых есть только цифры 0 и 7. Сколько таких чисел?

Решение. Поскольку выписанные числа четные, то заканчиваются они нулем, то есть для семерок осталось 9 разрядов. С другой стороны, с нуля начинаться они не могут, поэтому начинаются они все с семерки. При этом каждое выписанное число делится на 3, значит в каждом таком числе количество семерок кратно трем, а раз оно не больше девяти, то оно равно или три, или шесть, или девять (вместе с самой первой).

Посчитаем сколько всего таких чисел. Первая и последняя цифры известны, надо поставить только семерки. Чисел столько же сколько способов выбрать 2 разряда для семерок из 8 оставшихся плюс выбрать 5 разрядов для семерок из 8 оставшихся плюс выбрать 8 разрядов для семерок из 8 оставшихся, то есть $C_8^2 + C_8^5 + C_8^8 = 28 + 56 + 1 = 85$.

Ответ. 85.

9.2. В шахматном турнире, проходящем по круговой системе в один круг (то есть каждые два участника сыграли по одной партии), участвовало 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. По окончании турнира каждый сделал заявление: «Все, кого я победил на этом турнире, — лжецы.» Известно, что единоличным победителем турнира стал рыцарь. Какое наименьшее количество рыцарей могло участвовать в турнире? В шахматах за победу даётся 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков.

Решение. Из заявлений участников следует, что 1) все рыцари между собой играли вничью; 2) каждый лжец победил хотя бы одного рыцаря. Эти два условия являются также и достаточными для того, чтобы описанная в условии ситуация имела место. Так как победитель был один, он одержал хотя бы одну победу, а так как он — рыцарь, то победил он лжеца, так что лжецов не 0. Победённый победителем лжец победил хотя бы одного рыцаря, поэтому в турнире, кроме победителя, был ещё хотя бы один рыцарь. Значит, рыцарей хотя бы два. Докажем, что их могло быть два.

Пусть рыцарей — два, лжецов — восемь, рыцарь-победитель выиграл у всех лжецов, другой рыцарь, рыцарь-неудачник, всем лжецам проиграл, а остальные партии завершились вничью. Тогда разность побед и поражений у победителя равна 8, у неудачника она равна -8 , а у всех остальных участников — 0. Все условия выполнены, такой турнир возможен.

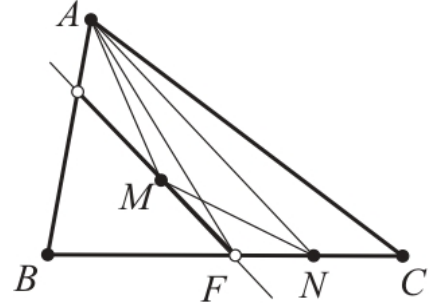
Ответ. 2.

9.3. Дан неравносторонний треугольник ABC . Рассмотрим все такие пары точек (M, N) , где M лежит внутри треугольника, N — на его границе, а ломаная AMN делит треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра. Найдите геометрическое место точек M .

Решение. Без ограничения общности будем считать, что $AB < AC$. Отметим, что в силу неравенства треугольника N лежит на отрезке BC , тогда $P_{AMNB} = AM + MN + NB + BA$, $P_{AMNC} = AM + MN + NC + CA$, следовательно, $AB + BN = AC + CN$, то есть точки A и N

делят замкнутую ломаную ABC на две части равной длины. Тогда точка N определяется однозначно (на самом деле N — точка касания вневписанной окружности со стороной BC , что для решения задачи несущественно).

Пусть F — середина стороны BC . В силу $AB < AC$, точка F лежит между точками N и B . Тогда $S_{ABF} = S_{ACF}$ — свойство медианы делить площадь треугольника пополам. Если бы точки M и N лежали в одной полуплоскости относительно прямой AF , то четырёхугольник $AMNC$ лежал бы строго внутри треугольника ACF , следовательно, имел бы площадь меньшую, чем четырёхугольник $ABNM$, что не так. Значит, точки M и N лежат в разных полуплоскостях относительно AF , и отрезок AF пересекает отрезок MN в некоторой точке D . Из равенств $S_{AMNB} = S_{ABF} + S_{DFN} - S_{ADM}$, $S_{AMNC} = S_{ACF} + S_{ADM} - S_{DFN}$, $S_{ABF} = S_{ACF}$ и $S_{AMNB} = S_{AMNC}$ следует, что $S_{DFN} = S_{ADM} \Leftrightarrow S_{AFN} = S_{AMN}$. Тогда точки M и F лежат на одном и том же расстоянии от прямой AN . Это (с учётом того, что точки M и F лежат по одну сторону от прямой AN) означает параллельность прямых MF и AN .



Верно и обратное. Если лежащая внутри треугольника ABC точка M такова, что $MF \parallel AN$, то четырёхугольник $AMFN$ — трапеция, и, согласно её свойствам, $S_{AMD} = S_{DFN} \Leftrightarrow S_{AMN} = S_{AFN}$, то есть пара точек (M, N) — одна из рассматриваемых пар.

Ответ. лежащая внутри треугольника ABC часть прямой, проходящей через середину BC параллельно прямой, проходящей через вершину A и делящую периметр треугольника пополам.

9.4. Незнайка нарисовал две параболы $y = x^2$ и $y = x^2 + 2$ и утверждает, что любая точка параболы $y = x^2 + 1$ равноудалена от обеих парабол $y = x^2$ и $y = x^2 + 2$. Прав ли Незнайка? Расстоянием от точки до параболы назовём наименьшее из попарных расстояний от этой точки до всевозможных точек параболы.

Решение. Нет. Если это так, то равноудалена до этих парабол точка $O(1; 0)$ как лежащая на $y = x^2 + 1$. Вся парабола $y = x^2 + 2$ не ниже прямой $y = 2$, поэтому расстояние от O до этой параболы не меньше единицы. Значит расстояние от O до параболы $y = x^2$ также не меньше единицы. Но это не так. Возьмем ниже точки O на параболе $y = x^2$ точку, но не вершину, например $(1/2; 1/4)$. Квадрат расстояния от нее до O равен $1/2^2 + 3^2/4^2 = (4+9)/16 = 13/16$, что меньше 1. Следовательно Незнайка не прав.

Ответ. Нет, Незнайка не прав.

9.5. Пусть задано натуральное число k . Будем говорить, что набор из 4 натуральных чисел (a_1, a_2, a_3, a_4) k -расивый, если этот набор удовлетворяет равенству

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - kx_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Минимальным назовём k -расивый набор $(a_1, \dots, a_4)$ с самой маленькой среди всех k -расивых наборов суммой $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ и у которого $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$.

а) Докажите, что если набор (a_1, a_2, a_3, a_4) k -расивый, то $(ka_2a_3a_4 - a_1, a_2, a_3, a_4)$ тоже k -расивый. (2 балла)

б) Докажите, что для всякого минимального k -расивого набора (a_1, a_2, a_3, a_4) выполнено $ka_3a_4 \leq 4$. (4 балла)

в) Найдите все минимальные k -расивые наборы при $k > 2$. (3 балла)

г) Докажите, что если k -расивый набор есть, то имеется и бесконечная серия k -расивых наборов. (3 балла)

д) Найдите хотя бы одно решение в натуральных числах уравнения $x_1^2 + x_2^2 + 2 = 4x_1x_2$ с $x_1 > 100$. (2 балла)

Решение. а) Пусть дано решение уравнения

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = kx_1x_2x_3x_4, \quad (*)$$

некоторый набор (a_1, a_2, a_3, a_4) , сопоставим ему многочлен

$$P(x) = x^2 - px + q, \quad p = ka_2a_3a_4, \quad q = a_2^2 + a_3^2 + a_4^2. \quad (**)$$

Тогда a_1 — его корень по условию. Воспользовавшись теоремой Виета или подставив напрямую, замечаем, что число $p - a_1$ — тоже его корень. Это число вслед за p и a_1 — целое, а в силу теоремы Виета оно положительно, как частное q и a_2 . Тогда набор $(p - a_1, a_2, a_3, a_4)$ удовлетворяет $(*)$, а значит — тоже k -расивый.

б) Возьмём минимальный k -расивый набор (a_1, a_2, a_3, a_4) . По пункту а) из минимальности следует $a_1 \leq p - a_1$, а значит и $a_2 \leq a_1 \leq p - a_1$. Как показано в доказательстве предыдущего пункта, a_1 и $p - a_1$ — корни многочлена $P(x)$. Тогда этот многочлен отрицателен в точности между этими корнями. Теперь $P(a_2) \geq 0$ из $a_2 \leq a_1 \leq p - a_1$. Это, в силу $a_3 \leq a_2$ и $a_4 \leq a_2$ дает

$$0 \leq P(a_2) = a_2^2 - ka_2^2a_3a_4 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \leq a_2^2(4 - ka_3a_4),$$

что означает $ka_3a_4 \leq 4$ засчёт положительности a_2 .

в) Возьмём минимальный k -расивый набор (a_1, a_2, a_3, a_4) . Пусть $k > 4$. Тогда $ka_3a_4 \leq 4$ дает $a_3a_4 < 1$, теперь в силу того, что все a_i натуральны, минимальных k -расивых наборов при $k > 4$ нет.

Пусть $2 < k \leq 4$. Тогда $ka_3a_4 \leq 4$ дает $a_3a_4 < 2$, то есть $a_3 = a_4 = 1$.

Покажем, что и $a_2 = 1$. Действительно, подставляя $a_3 = a_4 = 1$ в $(**)$, получаем $p = ka_2$, $q = a_2^2 + 2$, $P(a_2) = a_2^2 - ka_2^2 + a_2^2 + 2 = a_2^2(2 - k) + 2$. Поскольку $P(a_2) \geq 0$ для всех k -расивых наборов, то $a_2^2 \leq \frac{2}{k-2} \leq 2$, откуда $a_2 = 1$.

Теперь подстановка $a_2 = a_3 = a_4 = 1$ в $(*)$ даёт квадратное уравнение $a_1^2 + 3 = ka_1$. Его дискриминант равен $k^2 - 12$ и может оказаться полным квадратом только при $k = 4$. Решая это уравнение с $k = 4$, находим k -расивый набор $(1, 1, 1, 1)$, минимальность которого тривиальна.

г) Предположим противное и k -расивых наборов конечное число. Тогда найдется k -расивый набор (a_1, a_2, a_3, a_4) , у которого сумма $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ максимальна. Без ограничения общности можно считать, что $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. По пункту а) k -расивым набором

является $(ka_2a_3a_4 - a_1, a_2, a_3, a_4)$. По выбору (a_1, a_2, a_3, a_4) имеем $a_1 \geq ka_2a_3a_4 - a_1$, то есть $2a_1 \geq ka_2a_3a_4$. Умножая обе части на a_1 , получаем $2a_1^2 \geq ka_1a_2a_3a_4 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$, а в силу $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ и $2a_1^2 \geq 4a_1^2$. Поскольку $a_1^2 \geq 1$, получили противоречие. Значит, k -красивых наборов бесконечно много.

д) Возьмём $k = 4$, легко проверить, что набор $(1, 1, 1, 1)$ является k -красивым. Отметим, что в пункте а) было доказано, что каждому k -красивому набору $(a_1, a_2, 1, 1)$ можно сопоставить еще один k -красивый набор $(4a_2 - a_1, a_2, 1, 1)$, а в силу симметрии таким будет и $(a_2, 4a_2 - a_1, 1, 1)$. Последовательно применяя это правило получаем:

$$(1, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 3, 1, 1) \rightarrow (3, 11, 1, 1) \rightarrow (11, 41, 1, 1) \rightarrow (41, 153, 1, 1).$$

Набор $(41, 153, 1, 1)$ k -красивый с $k = 4$, значит $(153, 41, 1, 1)$ такой же и тоже удовлетворяет уравнению (*). Подставляя туда $k = 4, a_3 = a_4 = 1$, получаем требуемое равенство для $a_1 = 153, a_2 = 41$, при этом $153 > 100$.

Ответ. в) $(1, 1, 1, 1)$ при $k = 4$, других минимальных при $k > 3$ нет; д) $a_1 = 153, a_2 = 41$; есть и другие решения, $a_1 = 153, a_2 = 571, a_1 = 2131, a_2 = 571...$

Примечание. Рассматриваемое в этой задаче диофантово уравнение — модификация уравнения Маркова для четырех переменных вместо трех. Получение дерева решений самого уравнения Маркова прекрасно разобрано, например, см. Квант, 1985, №4, а то, чем оно полезно (например, комбинаторика слов, квадратичные формы, диофантовы приближения, целочисленная геометрия, теория групп) см. обстоятельно, покороче, или даже в виде глубокомысленного комментария.