

XXV ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2026

10-11 класс

10-11.1. 20 игроков играли в пейнтбол. У каждого было по 7 шариков с краской. В конце все отстреляли все шарики. В Андрея попали 10 раз, а в Вову попало меньше шариков, чем во всех остальных. Насколько много шариков могли попасть в Вову, если ни один шарик не попал в двух и более игроков.

10-11.2. Дано натуральное число $n > 1$. Пусть $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_k = n$ — все натуральные делители числа n . Оказалось, что $n = (d_2 - d_1)(d_3 - d_2) \dots (d_k - d_{k-1})$. Найдите все возможные значения числа n .

10-11.3. В треугольнике ABC точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB соответственно. Вписанная окружность треугольника ABC с центром в точке I касается отрезка B_1C_1 в точке N . Описанная окружность треугольника BIN пересекает вторично сторону AB в точке K . Докажите, что точки C, N, K лежат на одной прямой.

10-11.4. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_n$ ($n > 3$) — конечная возрастающая геометрическая прогрессия, знаменатель которой — натуральное число. Известно, что все члены этой прогрессии можно разбить на k ($k \geq 3$) множеств так, что суммы чисел b_i , попавших в эти множества, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите все возможные пары (n, k) .

10-11.5. В стране n городов и k авиакомпаний ($n > k$). Некоторые города связаны односторонними авиалиниями. Известно, что из каждого города выходит ровно одна авиалиния каждой авиакомпании и в каждый город ведёт ровно одна авиалиния каждой из k компаний. В стране есть Жулик, который летает на самолётах только одной из авиакомпаний (но неизвестно какой), и есть Детектив, который пытается его поймать. Каждый день, рано утром, Детектив один раз может позвонить шерифу одного из n городов и попросить проверить, находится ли преступник в его городе. В случае положительного ответа Жулика ловят. В случае отрицательного ответа вечером того же дня Жулик совершает перелёт из одного города в другой. Из города нельзя перелететь в тот же город.

а) Предположим, что Детективу неизвестно, как устроены авиалинии и каким авиакомпаниям они принадлежат. Сможет ли он поймать Жулика за конечное число дней? (2 балла)

б) Детективу всё ещё неизвестно, как устроены авиалинии и каким авиакомпаниям они принадлежат. Предположим также, что для любой выбранной компании Жулик сможет за несколько дней попасть из любого города в любой, пользуясь авиалиниями этой компании. За какое наименьшее число вопросов Детектив гарантированно поймает Жулика? (2 балла)

в) В первый день поиска Жулика, до того, как Детектив успел выбрать город, в который будет звонить, ему принесли карту, на которой указаны все авиалинии и каким авиакомпаниям они принадлежат. Пусть $k = 2$. Докажите, что для поимки Жулика Детективу достаточно $\left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil$ дней. (4 балла)

г) Верно ли, что существует бесконечно много пар (n, k) натуральных чисел, для которых маршруты авиакомпаний могут быть устроены так, что даже глядя на карту, Детектив не сможет поймать Жулика в течение n дней? (6 баллов)