

XXV ВУЗОВСКО-АКАДЕМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Екатеринбург, Уральский федеральный университет, 2026

9 класс

9.1. Вовочка выписал все десятизначные числа, которые делятся на 6 и в записи которых есть только цифры 0 и 7. Сколько таких чисел?

9.2. В шахматном турнире, проходящем по круговой системе в один круг (то есть каждые два участника сыграли по одной партии), участвовало 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. По окончании турнира каждый сделал заявление: «Все, кого я победил на этом турнире, — лжецы.» Известно, что единоличным победителем турнира стал рыцарь. Какое наименьшее количество рыцарей могло участвовать в турнире? В шахматах за победу даётся 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков.

9.3. Дан неравносторонний треугольник ABC . Рассмотрим все такие пары точек (M, N) , где M лежит внутри треугольника, N — на его границе, а ломаная AMN делит треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра. Найдите геометрическое место точек M .

9.4. Незнайка нарисовал две параболы $y = x^2$ и $y = x^2 + 2$ и утверждает, что любая точка параболы $y = x^2 + 1$ равноудалена от обеих парабол $y = x^2$ и $y = x^2 + 2$. Прав ли Незнайка? Расстоянием от точки до параболы назовём наименьшее из попарных расстояний от этой точки до всевозможных точек параболы.

9.5. Пусть задано натуральное число k . Будем говорить, что набор из 4 натуральных чисел (a_1, a_2, a_3, a_4) *k-расивый*, если этот набор удовлетворяет равенству

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - kx_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Минимальным назовём *k-расивый* набор $(a_1, \dots, a_4)$ с самой маленькой среди всех *k-расивых* наборов суммой $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ и у которого $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$.

а) Докажите, что если набор (a_1, a_2, a_3, a_4) *k-расивый*, то $(ka_2a_3a_4 - a_1, a_2, a_3, a_4)$ тоже *k-расивый*. (2 балла)

б) Докажите, что для всякого минимального *k-расивого* набора (a_1, a_2, a_3, a_4) выполнено $ka_3a_4 \leq 4$. (4 балла)

в) Найдите все минимальные *k-расивые* наборы при $k > 2$. (3 балла)

г) Докажите, что если *k-расивый* набор есть, то имеется и бесконечная серия *k-расивых* наборов. (3 балла)

д) Найдите хотя бы одно решение в натуральных числах уравнения $x_1^2 + x_2^2 + 2 = 4x_1x_2$ с $x_1 > 100$. (2 балла)