7 класс. Возможные решения

7.1 Крош и Бараш

Ответ: $3v\tau/7 < s_2 < 3v\tau/4;\ t_0 = \tau/7.$

Пусть s — длина всей дистанции. Путь, пройденный смешариками до момента первого обгона, равен $v\tau$. Отрезок пути, равный $s/4$, Крош бежал со скоростью $0{,}8v$, а оставшийся участок — со скоростью $1{,}5v$, поэтому:

$$\frac{s}{4\cdot 0{,}8v} + \frac{v\tau - \frac{1}{4}s}{1{,}5v} = \tau \quad \Rightarrow \quad s = \frac{16}{7}v\tau.$$

Общее время движения Бараша равно $T = 16\tau/7$, а время движения Кроша на первом участке:

$$t_1 = \frac{\frac{1}{4}s}{0{,}8v} = \frac{5\tau}{7}.$$

Длина второго участка будет максимальной, когда Бараш обгонит Кроша практически на самом финише. Пусть s_2 — длина второго участка. Тогда:

$$\frac{s_2}{1{,}5v} + \frac{\frac{3}{4}s - s_2}{0{,}9v} = \frac{11}{7}\tau \quad \Rightarrow \quad \frac{s_2}{1{,}5v} + \frac{\frac{12}{7}v\tau - s_2}{0{,}9v} = \frac{11}{7}\tau \quad \Rightarrow \quad s_2 = \frac{3v\tau}{4}.$$

Длина второго участка минимальна, когда Крош закончит движение со скоростью $1{,}5v$ в момент обгона Бараша (в момент времени τ). Поэтому минимальная длина второго участка равна: $v\tau - s/4 = 3v\tau/7$.
Отставание Кроша от Бараша будет максимальным, когда s_2 будет минимальным. Оставшийся путь до финиша составляет: $9v\tau/7$. Максимальное время t_0 равно:

$$t_0 = \frac{\frac{9}{7}v\tau}{0{,}9v} - \frac{\frac{9}{7}v\tau}{v} = \frac{10\tau}{7} - \frac{9\tau}{7} = \frac{\tau}{7}.$$

7.2 Пена

Ответ: $v_{\max} = 10$ см/с; $v_{\min} = 0$ см/с; $\tau = \dfrac{\rho_3 V}{\mu} = 21$ с.

Рассмотрим все три участка графика.
1. На первом плотность пены постоянна и равна $\rho_1 = 0{,}1$ г/см^3. Объем пены в этом случае изменяется по закону:

$$V_1(t) = \frac{\mu t}{\rho_1} = 1000\,\frac{\text{см}^3}{\text{с}}\cdot t.$$

Так как объем изменяется равномерно, скорость, с которой движется поршень, равна:

$$v_1 = \frac{\mu}{\rho_1 S} = 10 \text{ см/с}.$$

2. На втором участке плотность пены изменяется линейно по закону: $\rho_2(t) = 0{,}02\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}} \cdot t$. Для этого случая:

$$V_2(t) = \frac{\mu t}{\rho_2(t)} = 5000 \text{ см}^3.$$

Так как на этом участке объем постоянен, скорость движения поршня равна нулю.

3. На третьем участке плотность пены постоянна и равна $\rho_3 = 0{,}3$ г/см^3. Рассматривая этот случай аналогично первому, находим, что скорость движения поршня составляет:

$$v_3 = \frac{\mu}{\rho_3 S} = 3{,}3 \text{ см/с}.$$

В результате, минимальная скорость поршня равна нулю, а максимальная 10 см/с. Объем пены $V = 7$ дм^3 $= 7000$ см^3 превышает объем V_2 на втором участке, поэтому в момент времени τ плотность пены равна $\rho_3 = 0{,}3$ г/см^3. Отсюда:

$$\tau = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho_3 V}{\mu} = 21 \text{ с}.$$

7.3 Поршни

Ответ: $p_1 = \frac{p_0}{6}$; $V_\text{а} = \frac{lS}{20}$; $V_\text{б} = \frac{11lS}{12}$.

В исходном положении без жидкости обе пружины сжаты на $l/4$ и поршни упираются друг в друга. При закачивании первых порций жидкости оба поршня движутся вправо, по-прежнему сохраняя контакт. Пусть x — смещение поршней (см. рис. 8а). Запишем условие равновесия системы:

$$k\left(\frac{l}{4} - x\right) + p(2S - S) = k\left(\frac{l}{4} + x\right),$$

откуда $p = \frac{2kx}{S} = \frac{2p_0 V}{V_0}$, где $p_0 = \frac{kl}{S}$, $V_0 = lS$.

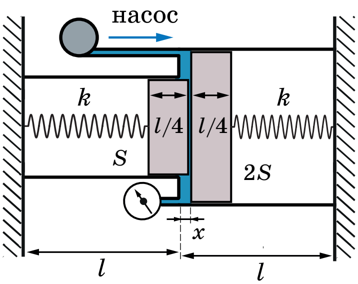

Рис. 8а

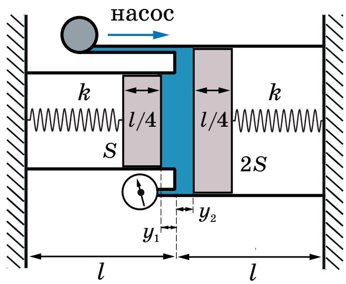

Рис. 8б

Контакт между поршнями исчезает, если сила давления жидкости на поршни равна силе упругости соответствующих пружин. Происходит это при смещении поршней вправо на некоторое расстояние x_1 при давлении p_1. При этом

$$\begin{cases} p_1 S = k\left(\dfrac{l}{4} - x_1\right) \\ p_1 2S = k\left(\dfrac{l}{4} + x_1\right) \end{cases} \Rightarrow \quad p_1 = \frac{kl}{6S} = \frac{p_0}{6}; \quad x_1 = \frac{l}{12}.$$

Объем, занятый жидкостью, при этом составляет:

$$V_1 = Sx_1 = \frac{Sl}{12} = \frac{V_0}{12}.$$

На следующем этапе поршни начинают разъезжаться в разные стороны. Пусть y_1 и y_2 — смещения левого и правого поршня соответственно (см. рис. 8б). Запишем условия равновесия поршней:

$$\begin{cases} pS = k\left(\dfrac{l}{4} + y_1\right) \\ p2S = k\left(\dfrac{l}{4} + y_2\right) \end{cases} \Rightarrow \quad 2y_1 - y_2 = -\frac{kl}{4}.$$

Объем залитой воды при этом равен $V = Sy_1 + 2Sy_2$, поэтому:

$$\begin{cases} y_1 = l\left(\dfrac{V}{5V_0} - \dfrac{1}{10}\right) \\ y_2 = l\left(\dfrac{2V}{5V_0} + \dfrac{1}{20}\right) \end{cases}$$

Отсюда находим, что давление жидкости в сосуде равно:

$$p = \frac{k}{S}\left(\frac{l}{4} + y_1\right) = p_0\left(\frac{V}{5V_0} + \frac{3}{20}\right).$$

Используя полученные формулы, определим объемы закачанной жидкости, о которых спрашивается в задаче. Давление $\frac{p_0}{10} < p_1$ соответствует первому случаю:

$$\frac{p_0}{10} = \frac{2p_0 V_\text{а}}{V_0} \quad \Rightarrow \quad V_\text{а} = \frac{V_0}{20} = \frac{lS}{20}$$

Значение давления $\frac{p_0}{3} > p_1$ соответствует второму случаю:

$$\frac{p_0}{3} = p_0\left(\frac{V_\text{б}}{5V_0} + \frac{3}{20}\right) \quad \Rightarrow \quad V_\text{б} = \frac{11V_0}{12} = \frac{11lS}{12}.$$

7.4 Упругий цикл

Ответ: $\Delta l_\text{min} = 4$ см; $k = \dfrac{F_0}{\Delta l_\text{min}} = 250$ Н/м.

Максимальная и минимальная силы упругости пружины отличаются в 3 раза, следовательно, минимальная деформация в 3 раза меньше максимальной и составляет $\Delta l_\text{min} = 4$ см. При этом, на участке 1–2, конец пружины, к которому приложена сила F, смещается на 2 см. Из этого следует, что противоположный конец пружины на участке 1–2, так же смещается (на 6 см).

Работа A силы F за цикл пропорциональна площади внутри цикла и в условных единицах составляет $F_0 \cdot 5$ см. Это позволяет найти значение силы $F_0 = 10$ Н и коэффициента жесткости пружины $k = F_0/\Delta l_\text{min} = 250$ Н/м. Координаты середины пружины можно найти по формуле

$$x_c = x - 0{,}5(l + \Delta l), \text{ где удлинение } \Delta l = F/k$$

.

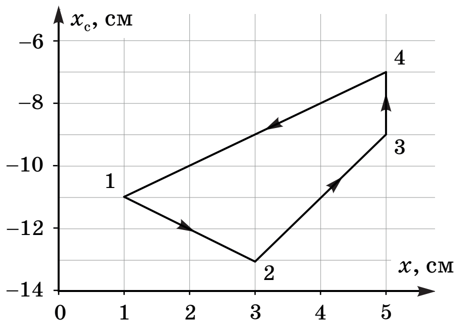

Рис. 9