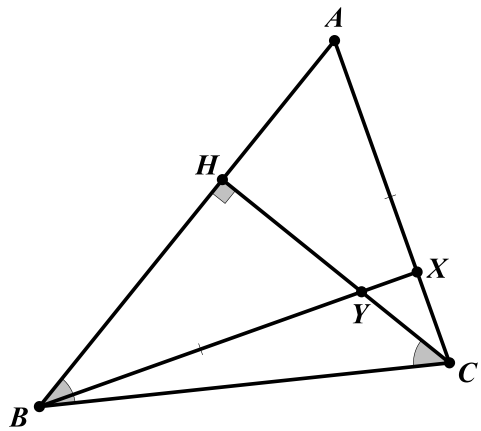
M10.1-3 При каких значениях параметра t уравнение $t^2x^2 + (2|t| - 1)x + 1 = 0$ имеет ровно одно решение?

Ответ. $0, \pm\frac{1}{4}$.

Решение. При $t = 0$ получаем уравнение $-x + 1 = 0$, которое имеет одно решение.
Если же $t \neq 0$, то уравнение является квадратным, а условие того, что корень ровно один, есть равенство нулю дискриминанта D. Запишем это условие: $D = (2|t| - 1)^2 - 4t^2 = 4|t| - 1 = 0$. Отсюда $t = \pm\frac{1}{4}$.

Комментарий. Разобран случай $t = 0$ — 2 балла.
Разобран случай $t \neq 0$ — 3 балла.

M10.2-3 В остроугольном треугольнике ABC известно, что $\angle B = 45°$, CH — высота, X — точка на стороне AC, а Y — точка пересечения отрезков CH и BX. Найдите XY, если $BY = AC = 10$, $S_{ABC} = 60$.



Ответ. 2.

Решение. Поскольку треугольник BCH — равнобедренный, $BH = HC$, а значит, прямоугольные треугольники BHY и CAH равны по катету и гипотенузе. Поэтому $\angle ABX = \angle HCA$, и BX — высота треугольника ABC. Его площадь равна $\frac{1}{2}AC \cdot (AC + XY) = 60$, откуда $XY = 2$.

Комментарий. Получено равенство треугольников BHY и CAH — 2 балла.
Доказано, что BX — высота треугольника ABC — 2 балла.

M10.3-3 Сколько существует упорядоченных наборов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 попарно различных натуральных чисел таких, что $x_k + x_{9-k} = 20$ для всех k от 1 до 4?

Ответ. $C_9^4 \cdot 2^4 \cdot 4! = 48384$.

Решение. Если $x_1 = 10 - u$, $x_2 = 10 - v$, $x_3 = 10 - p$, $x_4 = 10 - q$, то $x_5 = 10 + q$, $x_6 = 10 + p$, $x_7 = 10 + v$, $x_8 = 10 + u$. Выбрать 4 числа u, v, p, q с различными модулями, не превосходящими 9 и не меньшими, чем 1, можно C_9^4 способами. Остаётся распределить выбранные числа по переменным u, v, p и q (4! способов) и выбрать знаки для этих чисел (2^4 способов). Поэтому получаем окончательно $C_9^4 \cdot 2^4 \cdot 4! = 48384$ наборов.

Комментарий. Комбинаторная ошибка — не более 2 баллов за задачу.
Ответ не доведён до числа — снять 1 балл.

M10.4-3 Найдите все пары (x, y) такие, что $x \le 2$, $y \ge 3$ и

$$2y - 2x + \frac{y-1}{2y-5} - \frac{x-1}{2x-5} = 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-1}.$$

Ответ. $\left(2, \dfrac{13}{4}\right)$.

Решение. Уравнение можно переписать в виде

$$\frac{(2x-5+\sqrt{x-1})^2}{2x-5} + \frac{(2y-5-\sqrt{y-1})^2}{5-2y} = 0.$$

Поскольку $x \le 2$, а $y \ge 3$, знаменатели обеих дробей отрицательны, а значит, равенство возможно лишь в том случае, когда $5-2x = \sqrt{x-1}$ и $2y-5 = \sqrt{y-1}$. Уравнение $5-2x = \sqrt{x-1}$ равносильно

$$\begin{cases} 4x^2 - 20x + 25 = x - 1, \\ 5 - 2x \ge 0, \end{cases}$$

откуда $x = 2$. Решив аналогичным образом уравнение $2y - 5 = \sqrt{y-1}$, получаем $y = \dfrac{13}{4}$. Итак, условию удовлетворяет единственная пара $(x, y) = \left(2, \dfrac{13}{4}\right)$.

Комментарий. С помощью выделения полных квадратов уравнение приведено к указанному в решении виду — 3 балла.

Получены посторонние решения — снять по 1 баллу за каждое.

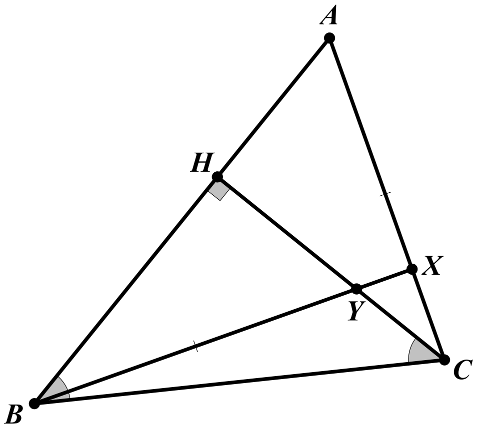
M10.1-4 При каких значениях параметра t уравнение $tx^2 + (3 - 2|t|)x + t = 0$ имеет ровно одно решение?

Ответ. $0, \pm\frac{3}{4}$.

Решение. При $t = 0$ получаем уравнение $3x = 0$, которое имеет одно решение.
Если же $t \neq 0$, то уравнение является квадратным, а условие того, что корень ровно один, есть равенство нулю дискриминанта D. Запишем это условие: $D = (3 - 2|t|)^2 - 4t^2 = 9 - 12|t| = 0$. Отсюда $t = \pm\frac{3}{4}$.

Комментарий. Разобран случай $t = 0$ — 2 балла.
Разобран случай $t \neq 0$ — 3 балла.

M10.2-4 В остроугольном треугольнике ABC известно, что $\angle B = 45°$, CH — высота, X — точка на стороне AC, а Y — точка пересечения отрезков CH и BX. Найдите XY, если $BY = AC = 6$, $S_{ABC} = 21$.



Ответ. 1.

Решение. Поскольку треугольник BCH — равнобедренный, $BH = HC$, а значит, прямоугольные треугольники BHY и CAH равны по катету и гипотенузе. Поэтому $\angle ABX = \angle HCA$, и BX — высота треугольника ABC. Его площадь равна $\frac{1}{2}AC \cdot (AC + XY) = 21$, откуда $XY = 1$.

Комментарий. Получено равенство треугольников BHY и CAH — 2 балла.
Доказано, что BX — высота треугольника ABC — 2 балла.

M10.3-4 Сколько существует упорядоченных наборов x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} попарно различных натуральных чисел таких, что $x_k + x_{11-k} = 18$ для всех k от 1 до 5?

Ответ. $C_8^5 \cdot 2^5 \cdot 5! = 215040$.

Решение. Если $x_1 = 9 - u$, $x_2 = 9 - v$, $x_3 = 9 - p$, $x_4 = 9 - q$, $x_5 = 9 - r$, то $x_6 = 9 + u$, $x_7 = 9 + v$, $x_8 = 9 + p$, $x_9 = 9 + q$, $x_{10} = 9 + r$. Выбрать 5 чисел u, v, p, q, r с различными модулями, не превосходящими 8 и не меньшими, чем 1, можно C_8^5 способами. Остаётся распределить выбранные числа по переменным u, v, p, q и r (5! способов) и выбрать знаки для этих чисел (2^5 способов). Поэтому получаем окончательно $C_8^5 \cdot 2^5 \cdot 5! = 215040$ наборов.

Комментарий. Комбинаторная ошибка — не более 2 баллов за задачу.
Ответ не доведён до числа — снять 1 балл.

M10.4-4 Найдите все пары (x, y) такие, что $x \le 2$, $y \ge 3$ и

$$3y - 3x + \frac{y+1}{3y-7} - \frac{x+1}{3x-7} = 2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{y+1}.$$

Ответ. $\left(\frac{16}{9}, 3\right)$.

Решение. Уравнение можно переписать в виде

$$\frac{(3x-7+\sqrt{x+1})^2}{3x-7} + \frac{(3y-7-\sqrt{y+1})^2}{7-3y} = 0.$$

Поскольку $x \le 2$, $y \ge 3$, знаменатели обеих дробей отрицательны, а значит, равенство возможно лишь в том случае, когда $7 - 3x = \sqrt{x+1}$ и $3y - 7 = \sqrt{y+1}$. Уравнение $7 - 3x = \sqrt{x+1}$ равносильно

$$\begin{cases} 9x^2 - 42x + 49 = x + 1, \\ 7 - 3x \ge 0, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{16}{9}$. Решив аналогичным образом уравнение $3y - 7 = \sqrt{y+1}$, получаем $y = 3$. Итак, условию удовлетворяет единственная пара $(x, y) = \left(\frac{16}{9}, 3\right)$.

Комментарий. С помощью выделения полных квадратов уравнение приведено к указанному в решении виду — 3 балла.

Получены посторонние решения — снять по 1 баллу за каждое.