М11.1-5 При каких значениях параметра t уравнение $(t^2-4)x^2+2\sqrt{t+2}\cdot x+3=0$ имеет хотя бы одно вещественное решение?

Ответ. $t \in \left(-2; \frac{7}{3}\right]$.

Решение. Для того, чтобы корень был определен, необходимо выполнение неравенства $t \geq -2$.
При $t=2$ получаем уравнение $4x+3=0$, которое имеет решение.
При $t=-2$ левая часть уравнения тождественно равна 3, поэтому уравнение не имеет решений.
Если же $t \neq \pm 2$, то уравнение является квадратным, а условие того, что оно имеет хотя бы один вещественный корень, есть неотрицательность его дискриминанта. Запишем это условие в виде $D_1 = \frac{D}{4} \geq 0$: $D_1 = t+2-3(t^2-4) \geq 0$. Отсюда $t \in \left[-2; \frac{7}{3}\right], t \neq \pm 2$.
Объединяя полученные решения, получаем ответ: $t \in \left(-2; \frac{7}{3}\right]$.
Комментарий. Разобран случай $t^2 = 4$ — 2 балла.
Разобран случай $t^2 \neq 4$ — 3 балла.

М11.2-5 Найдите все пары положительных вещественных чисел x и y таких, что

$$\begin{cases} 2xy = x^{y-5}, \\ x = 4y^2x^{-y}. \end{cases}$$

Ответ. $(x,y) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ или $(x,y) = \left(\sqrt[7]{26}, 13\right)$.

Решение. Логарифмируем оба уравнения системы:

$$\begin{cases} \ln 2 + \ln x + \ln y = (y-5)\ln x, \\ -2\ln 2 + \ln x - 2\ln y = -y\ln x. \end{cases}$$

Прибавим ко второму уравнению два раза первое уравнение и получим $3\ln x = (y-10)\ln x$, откуда либо $x=1$, либо $y=13$. В первом случае первое уравнение системы принимает вид $\ln y = -\ln 2$, откуда $y = \frac{1}{2}$. Во втором случае $\ln x + \ln 2 + \ln 13 = (13-5)\ln x$, откуда $x = \sqrt[7]{26}$.
Комментарий. Найдено только одно решение — 2 балла.
Получены лишние пары (x,y) — снять по 1 баллу за каждую пару.
Решения угаданы — баллы не добавляются.

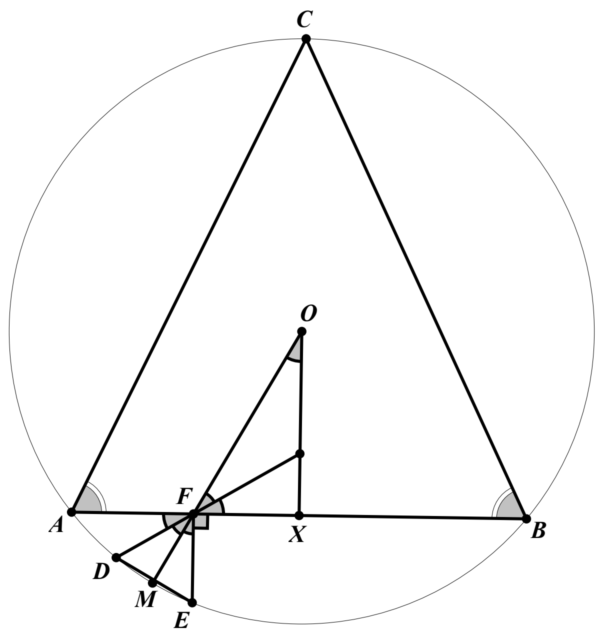
М11.3-5 Вася записал в тетрадь 6 целых чисел, каждое из которых отлично от нуля. После этого он дописал в тетрадь еще 6 чисел, которые получаются следующим образом: из квадрата каждого из 6 исходных чисел вычитается сумма 5 остальных исходных чисел. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло оказаться среди всех 12 чисел, записанных в тетради?

Ответ. 10.

Решение. Если все 6 исходных чисел отрицательны, то все 6 новых чисел будут положительными как разности между положительным числом (квадратом ненулевого числа) и суммой отрицательных чисел. В этом случае получится 6 отрицательных чисел.
Пусть среди 6 исходных чисел a, b, c, d, e, f есть положительное (для определённости — пусть число $a > 0$). Рассмотрим 6 чисел: b, c, d, e, f, $a^2-(b+c+d+e+f)$. Их сумма равна a^2 и поэтому положительна. Поэтому среди этих 6 чисел должно быть по крайней мере еще одно положительное, отличное от числа a, а значит, отрицательных чисел не больше $12-2=10$.
Покажем, что среди 12 написанных Васей чисел могло быть 10 отрицательных. Подходит, например, следующий исходный набор чисел: $a=10$, $b=c=d=e=f=-1$. Тогда среди 6 дописанных чисел будут 5 отрицательных, равных (-5), и одно положительное число 105.
Комментарий. Доказано, что отрицательных чисел не больше 10 — 3 балла.
Приведён пример, когда отрицательных чисел ровно 10 — 2 балла.

M11.4-5 Равнобедренный треугольник ABC ($AC = BC$), в котором $\angle CAB = \arcsin\frac{3}{4}$, вписан в окружность с центром O. На дуге AB этой окружности, не содержащей вершину C, выбраны точки D и E, а на стороне AB — точка F так, что $DF = FE$ и $EF \perp AB$. Найдите отношение $DE : BC$, если прямая DF содержит биссектрису $\angle OFB$.

Ответ. $\dfrac{1}{12}\left(\sqrt{\dfrac{191}{3}} - 1\right)$.



Решение. Пусть OM — радиус, перпендикулярный DE. В равнобедренном треугольнике DFE прямая OM совпадает с серединным перпендикуляром к основанию DE, поэтому точка F лежит на отрезке OM. Поскольку $\angle DFM = \angle EFM = \angle AFD$, все три угла равны $\frac{\pi}{6}$, а треугольник DEF — равносторонний. Пусть X — середина AB, а $\angle CAB = \alpha$. Тогда $\angle ACB = \pi - 2\alpha$, а угол AOB — центральный, опирающийся на ту же дугу AB, откуда $\angle AOX = \pi - 2\alpha$. Тогда $OX = -R\cos 2\alpha$, а из прямоугольного треугольника OFX с острым углом FOX, равным $\frac{\pi}{6}$, $FX = -\frac{1}{\sqrt{3}}R\cos 2\alpha$. По теореме Пифагора $(OX+EF)^2 = OE^2 - FX^2$, откуда $(-R\cos 2\alpha + EF)^2 = R^2 - \frac{1}{3}R\cos^2 2\alpha$ и

$$DE = EF = R\left(\sqrt{1 - \frac{1}{3}\cos^2 2\alpha} + \cos 2\alpha\right) =$$

$$= BC \cdot \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{3}\cos^2 2\alpha} + \cos 2\alpha\right) = BC \cdot \frac{\sqrt{22} - 3}{4\sqrt{5}}.$$

Комментарий. Доказано, что треугольник DEF — равносторонний — 2 балла.
Получено квадратное уравнение для нахождения EF — 1 балл;
Ответ не доведён до числа — снять 1 балл.

М11.1-6 При каких значениях параметра t уравнение $(t^2-9)x^2+2\sqrt{t+3}\cdot x+4=0$ имеет хотя бы одно вещественное решение?

Ответ. $t \in \left(-3; \frac{13}{4}\right]$.

Решение. Для того, чтобы корень был определен, необходимо выполнение неравенства $t \geq -3$. При $t=3$ получаем уравнение $2\sqrt{6}\cdot x+4=0$, которое имеет решение.
При $t=-3$ левая часть уравнения тождественно равна 4, поэтому уравнение не имеет решений. Если же $t \neq \pm 3$, то уравнение является квадратным, а условие того, что оно имеет хотя бы один вещественный корень, есть неотрицательность его дискриминанта. Запишем это условие в виде $D_1=\frac{D}{4} \geq 0$: $D_1 = t+3-4(t^2-9) \geq 0$. Отсюда $t \in \left[-3; \frac{13}{4}\right], t \neq \pm 3$.
Объединяя полученные решения, получаем ответ: $t \in \left(-3; \frac{13}{4}\right]$.
Комментарий. Разобран случай $t^2=9$ — 2 балла.
Разобран случай $t^2 \neq 9$ — 3 балла.

М11.2-6 Найдите все пары положительных вещественных чисел x и y таких, что

$$\begin{cases} 3xy = x^{4y+1}, \\ x = 9y^2x^{-2y}. \end{cases}$$

Ответ. $(x,y)=\left(1,\frac{1}{3}\right)$ или $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{8}},\frac{1}{6}\right)$.

Решение. Логарифмируем оба уравнения системы:

$$\begin{cases} \ln 3+\ln x+\ln y = (4y+1)\ln x, \\ -2\ln 3+\ln x-2\ln y = -2y\ln x. \end{cases}$$

Прибавим ко второму уравнению два раза первое уравнение и получим $3\ln x = (6y+2)\ln x$, откуда либо $x=1$, либо $y=\frac{1}{6}$. В первом случае первое уравнение системы принимает вид $\ln y = -\ln 3$, откуда $y=\frac{1}{3}$. Во втором случае $\ln x+\ln 3-\ln 6 = \left(\frac{2}{3}+1\right)\ln x$, откуда $x=\frac{1}{\sqrt{8}}$.
Комментарий. Найдено только одно решение — 2 балла.
Получены лишние пары (x,y) — снять по 1 баллу за каждую пару.
Решения угаданы — баллы не добавляются.

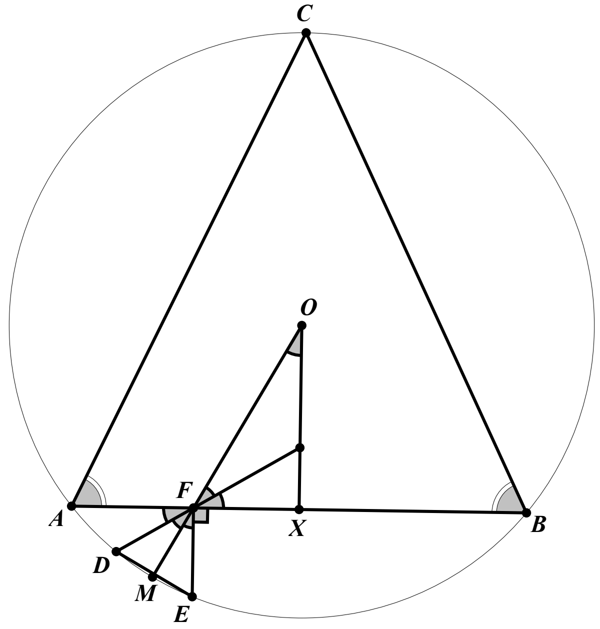
М11.3-6 Вася записал в тетрадь 7 целых чисел, каждое из которых отлично от нуля. После этого он дописал в тетрадь еще 7 чисел, которые получаются следующим образом: из квадрата каждого из 7 исходных чисел вычитается сумма 6 остальных исходных чисел. Какое наибольшее количество отрицательных чисел могло оказаться среди всех 14 чисел, записанных в тетради?

Ответ. 12.

Решение. Если все 7 исходных чисел отрицательны, то все 7 новых чисел будут положительными как разности между положительным числом (квадратом ненулевого числа) и суммой отрицательных чисел. В этом случае получится 7 отрицательных чисел.
Пусть среди 7 исходных чисел a, b, c, d, e, f, g есть положительное (для определённости — пусть число $a>0$). Рассмотрим 7 чисел: b, c, d, e, f, g, $a^2-(b+c+d+e+f+g)$. Их сумма равна a^2 и поэтому положительна. Поэтому среди этих 7 чисел должно быть по крайней мере еще одно положительное, отличное от числа a, а значит, отрицательных чисел не больше $14-2=12$.
Покажем, что среди 14 написанных Васей чисел могло быть 12 отрицательных. Подходит, например, следующий исходный набор чисел: $a=10$, $b=c=d=e=f=g=-1$. Тогда среди 7 дописанных чисел будут 6 отрицательных, равных (-4), и одно положительное число 106.
Комментарий. Доказано, что отрицательных чисел не больше 12 — 3 балла.
Приведён пример, когда отрицательных чисел ровно 12 — 2 балла.

M11.4-6 Равнобедренный треугольник ABC ($AC = BC$), в котором $\angle CAB = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$, вписан в окружность с центром O. На дуге AB этой окружности, не содержащей вершину C, выбраны точки D и E, а на стороне AB — точка F так, что $DF = FE$ и $EF \perp AB$. Найдите отношение $DE : BC$, если прямая DF содержит биссектрису $\angle OFB$.

Ответ. $\dfrac{\sqrt{22}-3}{4\sqrt{5}}$.



Решение. Пусть OM — радиус, перпендикулярный DE. В равнобедренном треугольнике DFE прямая OM совпадает с серединным перпендикуляром к основанию DE, поэтому точка F лежит на отрезке OM. Поскольку $\angle DFM = \angle EFM = \angle AFD$, все три угла равны $\frac{\pi}{6}$, а треугольник DEF — равносторонний. Пусть X — середина AB, а $\angle CAB = \alpha$. Тогда $\angle ACB = \pi - 2\alpha$, а угол AOB — центральный, опирающийся на ту же дугу AB, откуда $\angle AOX = \pi - 2\alpha$. Тогда $OX = -R\cos 2\alpha$, а из прямоугольного треугольника OFX с острым углом FOX, равным $\frac{\pi}{6}$, $FX = -\frac{1}{\sqrt{3}}R\cos 2\alpha$. По теореме Пифагора $(OX+EF)^2 = OE^2 - FX^2$, откуда $(-R\cos 2\alpha + EF)^2 = R^2 - \frac{1}{3}R\cos^2 2\alpha$ и

$$DE = EF = R\left(\sqrt{1 - \frac{1}{3}\cos^2 2\alpha} + \cos 2\alpha\right) =$$

$$= BC \cdot \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\sqrt{1 - \frac{1}{3}\cos^2 2\alpha} + \cos 2\alpha\right) = BC \cdot \frac{\sqrt{22}-3}{4\sqrt{5}}.$$

Комментарий. Доказано, что треугольник DEF — равносторонний — 2 балла.
Получено квадратное уравнение для нахождения EF — 1 балл;
Ответ не доведён до числа — снять 1 балл.