M9.1-1 Уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два различных целых корня. Могло ли оказаться, что число $3p^2+(q-3)^2$ — простое?

Ответ. Не могло.

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения. По теореме Виета

$$3p^2+(q-3)^2=3(-x_1-x_2)^2+(x_1\cdot x_2-3)^2=(x_1^2+3)(x_2^2+3).$$

Остаётся заметить, что оба сомножителя x_1^2+3 и x_2^2+3 являются натуральными числами, отличными от единицы.

Комментарий. Записана теорема Виета — баллы не добавляются.
Выражение разложено на множители, содержащие квадраты корней — 4 балла.
Замечено, что каждый из сомножителей больше единицы — 1 балл.
Неверно записана теорема Виета — не более 2 баллов за задачу.

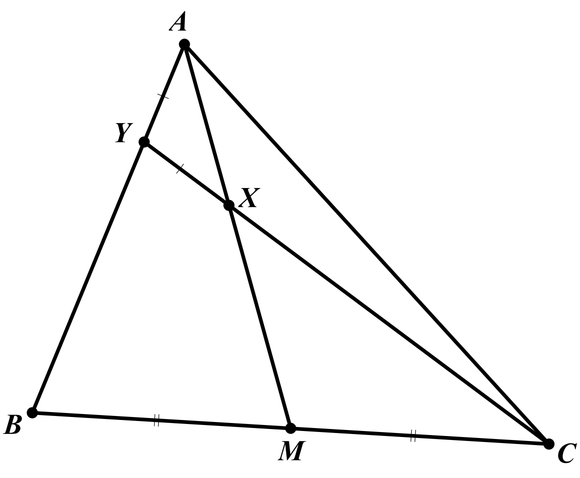
M9.2-1 Решите неравенство $\sqrt{2x}+\sqrt{x-4}\leq 14-x$.

Ответ. $x\in[4;8]$.

Решение. Заметим, что областью определения функции, стоящей в левой части неравенства, является множество $x\geq 4$. Перепишем неравенство в виде $\sqrt{2x}+\sqrt{x-4}+x\leq 14$: его левая часть является строго возрастающей на своей области определения функцией. Поскольку равенство достигается при $x=8$, решением неравенства будет множество $[4;8]$.

Комментарий. Найдено ОДЗ — баллы не добавляются.
Неэквивалентное преобразование неравенств — 0 баллов за задачу.
Ответ отличается от верного конечным числом точек — снять 1 балл.

M9.3-1 В треугольнике ABC проведена медиана AM, а затем на отрезке AM взята точка X. Луч CX пересекает сторону AB в такой точке Y, что $AY=YX$. Найдите отношение площадей $S_{ACX}:S_{BYX}$, если $S_{YCB}:S_{XCB}=6:5$.



Ответ. $S_{ACX}:S_{BYX}=5:4$.

Решение. Из теоремы Менелая для треугольника BYC следует, что $CX=BY$:

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CX}{XY}\cdot\frac{YA}{AB}=1\ \Leftrightarrow\ \frac{CX}{AB}=1.$$

Из равенства $S_{YCB}:S_{XCB}=6:5$ следует, что $YC:XC=6:5$, то есть

$$\frac{YX}{XC}=\frac{1}{5}=\frac{AY}{AB}.$$

Значит, $S_{ACX}:S_{AXY}=XC:XY=5$, а $S_{BYX}:S_{AXY}=BY:AY=4$. Отсюда $S_{ACX}:S_{BYX}=5:4$.

Комментарий. Доказано, что $CX=AB$ — 3 балла.

M9.4-1 Найдите количество способов расставить числа 204, 206, 208, 210, 212, 214, 216 в ряд так, чтобы сумма любых четырёх подряд идущих чисел делилась на 6.

Ответ. 144.

Решение. Поскольку все числа чётные, будем рассматривать делимость только на 3. Пусть x_1, x_2, $\ldots$, x_7 — остатки от деления на 3 чисел в искомой перестановке. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ и $x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ делятся на 3 (поскольку суммы соответствующих четвёрок чисел делятся на 3), а сумма этих четвёрок имеет такой же остаток от деления на 3, как и x_4 (так как сумма всех 7 исходных чисел делится на 3). Значит, x_4 обязан равняться нулю. Тогда остатки x_1, x_2 и x_3 — это произвольная перестановка 0, 1 и 2, а x_5, x_6 и x_7 однозначно определяются по $x_2+x_3+x_4$, $x_3+x_4+x_5$ и $x_4+x_5+x_6$ соответственно. Выбрать порядок остатков x_1, x_2, x_3 можно 3! способами, выбрать четвёртое число (с остатком $x_4 = 0$) — тремя способами, а распределить три пары чисел с одинаковыми остатками в первую и вторую тройки соответственно — 2^3 способами. Получаем в итоге $3! \cdot 3 \cdot 2^3 = 144$ расстановки.

Комментарий. Показано, что $x_4 = 0$ — 2 балла.
Комбинаторная ошибка — не более 3 баллов за задачу.
Ответ не доведён до числа — снять 1 балл.
Задача сведена к рассмотрению остатков от деления чисел на 3 — баллы не добавляются.

M9.1-2 Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных целых корня. Могло ли оказаться, что число $2p^2 + (q-2)^2$ — простое?

Ответ. Не могло.

Решение. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения. По теореме Виета

$$2p^2 + (q-2)^2 = 2(-x_1 - x_2)^2 + (x_1 \cdot x_2 - 2)^2 = (x_1^2 + 2)(x_2^2 + 2).$$

Остаётся заметить, что оба сомножителя $x_1^2 + 2$ и $x_2^2 + 2$ являются натуральными числами, отличными от единицы.

Комментарий. Записана теорема Виета — баллы не добавляются.
Выражение разложено на множители, содержащие квадраты корней — 4 балла.
Замечено, что каждый из сомножителей больше единицы — 1 балл.
Неверно записана теорема Виета — не более 2 баллов за задачу.

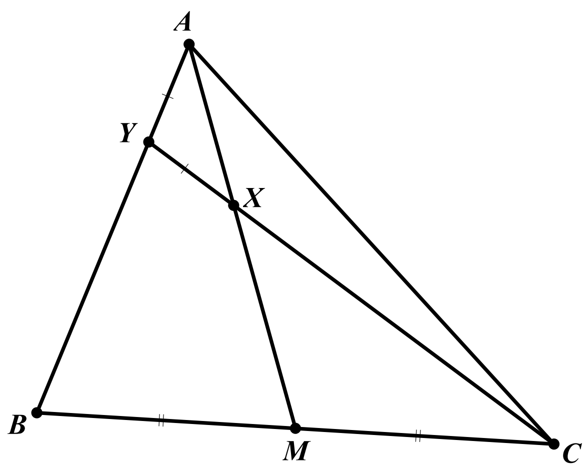
M9.2-2 Решите неравенство $\sqrt{3x} + \sqrt{x-8} \leq 20 - x$.

Ответ. $x \in [8; 12]$.

Решение. Заметим, что областью определения функции, стоящей в левой части неравенства, является множество $x \geq 8$. Перепишем неравенство в виде $\sqrt{3x}+\sqrt{x-8}+x \leq 20$: его левая часть является строго возрастающей на своей области определения функцией. Поскольку равенство достигается при $x = 12$, решением неравенства будет множество $[8; 12]$.

Комментарий. Найдено ОДЗ — баллы не добавляются.
Неэквивалентное преобразование неравенств — 0 баллов за задачу.
Ответ отличается от верного конечным числом точек — снять 1 балл.

M9.3-2 В треугольнике ABC проведена медиана AM, а затем на отрезке AM взята точка X. Луч CX пересекает сторону AB в такой точке Y, что $AY = YX$. Найдите отношение площадей $S_{ACX} : S_{BYX}$, если $S_{YCB} : S_{XCB} = 4 : 3$.



Ответ. $S_{ACX} : S_{BYX} = 3 : 2$.

Решение. Из теоремы Менелая для треугольника BYC следует, что $CX = BY$:

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CX}{XY} \cdot \frac{YA}{AB} = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{CX}{AB} = 1.$$

Из равенства $S_{YCB} : S_{XCB} = 4 : 3$ следует, что $YC : XC = 4 : 3$, то есть

$$\frac{YX}{XC} = \frac{1}{3} = \frac{AY}{AB}.$$

Значит, $S_{ACX} : S_{AXY} = XC : XY = 3$, а $S_{BYX} : S_{AXY} = BY : AY = 2$. Отсюда $S_{ACX} : S_{BYX} = 3 : 2$.

Комментарий. Доказано, что $CX = AB$ — 3 балла.

M9.4-2 Найдите количество способов расставить числа 408, 412, 416, 420, 424, 428, 432 в ряд так, чтобы сумма любых четырёх подряд идущих чисел делилась на 12.

Ответ. 144.

Решение. Поскольку все числа делятся на 4, будем рассматривать делимость только на 3. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_7$ — остатки от деления на 3 чисел в искомой перестановке. Тогда $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ и $x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ делятся на 3 (поскольку суммы соответствующих четвёрок чисел делятся на 3), а сумма этих четвёрок имеет такой же остаток от деления на 3, как и x_4 (так как сумма всех 7 исходных чисел делится на 3). Значит, x_4 обязан равняться нулю. Тогда остатки x_1, x_2 и x_3 — это произвольная перестановка 0, 1 и 2, а x_5, x_6 и x_7 однозначно определяются по $x_2+x_3+x_4$, $x_3+x_4+x_5$ и $x_4+x_5+x_6$ соответственно. Выбрать порядок остатков x_1, x_2, x_3 можно 3! способами, выбрать четвёртое число (с остатком $x_4 = 0$) — тремя способами, а распределить три пары чисел с одинаковыми остатками в первую и вторую тройки соответственно — 2^3 способами. Получаем в итоге $3! \cdot 3 \cdot 2^3 = 144$ расстановки.

Комментарий. Показано, что $x_4 = 0$ — 2 балла.
Комбинаторная ошибка — не более 3 баллов за задачу.
Ответ не доведён до числа — снять 1 балл.
Задача сведена к рассмотрению остатков от деления чисел на 3 — баллы не добавляются.