Ф11.1-1 Современные машины Формулы 1 имеют днище в форме тоннеля Вентури, нижняя часть которого образована полотном гоночной трассы. Схематично тоннель Вентури в разрезе представлен на рисунке, поток воздуха обозначен стрелкой. Оцените прижимную силу, действующую на машину Формулы 1, едущую по прямой со скоростью 80 м/с. Высота от верхней точки днища до асфальта на машине $a = 40$ см, а перепад высот на днище равен $h = 20$ см. Площадь низкой части тоннеля Венутри считайте равной $S = 1,5$ м^2, изменение ширины пренебрежимо малым, а тоннель Вентури изолированным от боковых потоков воздуха за счёт аэродинамики. Плотность воздуха примите равной $1,2$ кг/м^3

Ответ. $F = 7680$ Н.

Решение. Считая воздух несжимаемым, запишем уравнение Бернулли и закон сохранения массы

$$\Delta P = \rho/2(v'^2 - v^2)$$

$$val = v'(a-h)l,$$

где a – высота верхней точки днища до поверхности трассы. Тогда, получим, что

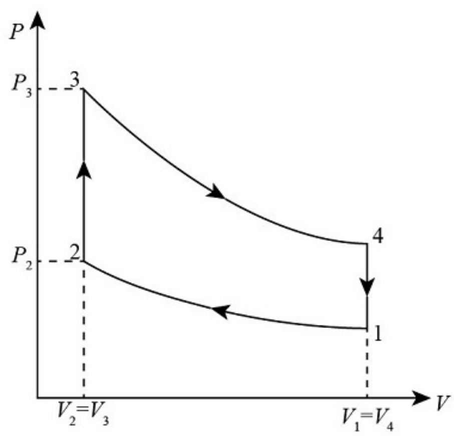
$$\Delta P = \frac{\rho}{2}v^2\left((1-h/a)^{-2} - 1\right)$$

Прижимная сила для машины будет равна

$$F = \Delta P S = \frac{\rho v^2 S}{2}\left((1-h/a)^{-2} - 1\right) = 7680 \text{ Н}.$$

Критерии оценивания.
Записан закон Бернулли для воздуха под днищем и получен перепад давления — 1 балл.
Записан закон сохранения массы для воздуха под днищем — 1 балла.
Получено выражение для давления в тоннеле Вентури — 1 балл.
Получено выражение для прижимной силы, действующей на болид — 1 балл.
Получен верный ответ — 1 балл.

Ф11.2-1 Один из ранних двигателей внутреннего сгорания основан на цикле Отто (на рисунке), состоящем из изохорного нагревания, адиабатического расширения, изохорного охлаждения и адиабатического сжатия. Конструкторы сделали двигатель со степенью сжатия, отношением наибольшего и наименьшего объемов в цикле, $\alpha = 10,5$ и мощностью $W = 204$ л.с. Какой расход 95го бензина Q, литров в час, будет у такого двигателя? Считайте что в течении одного такта работы двигателя количество рабочего вещества примерно постоянно, а отношение теплоёмкости при постоянном давлении к теплоёмкости при постоянном объеме $\gamma = C_P/C_V \approx 1,4$ для рабочего вещества. *1 л.с. равна 0,736 кВт. Удельная теплота сгорания 95-го бензина равна $\lambda = 33,5$ МДж/л*



Ответ. $27{,}2$ л/ч.

Решение. Поскольку мы знаем величину полезной мощности, то мощность, получаемая от сжигания бензина можно выразить как $W_{\text{бенз.}} = \lambda Q = W/\eta$. Осталось выразить КПД цикла Отто. Количество подводимой теплоты при изохорном нагреве равно $Q_{2-3} = \frac{i}{2}R(T_3 - T_2)$. Количество отводимой теплоты при изохорном охлаждении равно $Q_{4-1} = \frac{i}{2}R(T_1 - T_4)$. Отсюда получим, что КПД будет равен

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{1-4}|}{|Q_{2-3}|} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4/T_1 - 1}{T_3/T_2 - 1} \cdot \frac{T_1}{T_2}.$$

Так как для адиабаты справедливо, что $PV^\gamma = const$, то $TV^{\gamma-1} = const$. Отсюда можно получить, что $T_4/T_1 = T_3/T_2$. Отношение $T_1/T_2 = (V_2/V_1)^{\gamma-1} = (1/\alpha)^{\gamma-1}$. Поэтому, КПД равен:

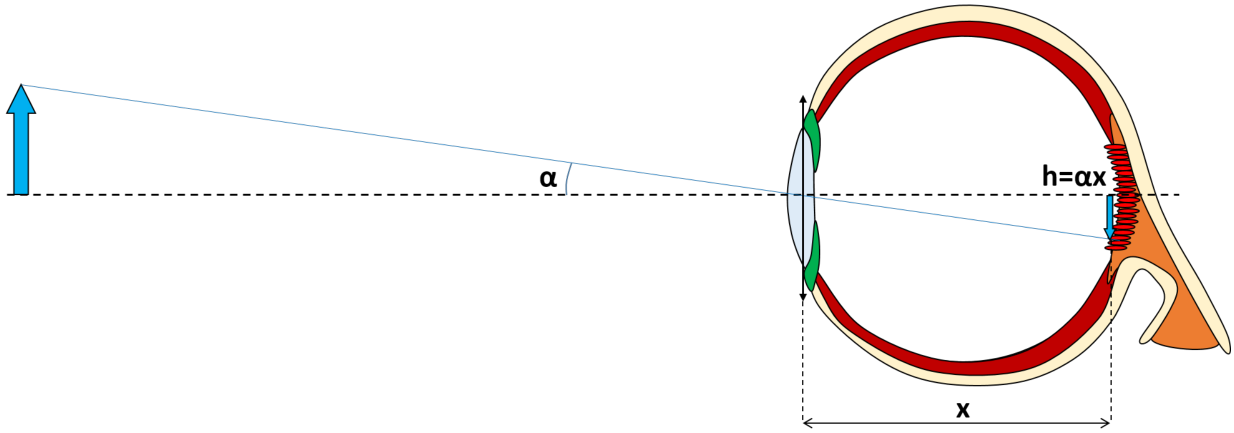
$$\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}$$

Получим ответ $Q = \left(1 - \frac{1}{\alpha^{\gamma-1}}\right)^{-1} \frac{W}{\lambda} = 27{,}2$ л/ч.
Критерии оценивания.
Записано выражение для КПД через отношение мощностей — 1 балл.
Получено выражение для КПД через отношение температур — 1 балла.
Получено выражение для КПД через степень сжатия — 1 балла.
Получено итоговое выражение для расхода — 1 балл.
Получен правильный ответ — 1 балл.

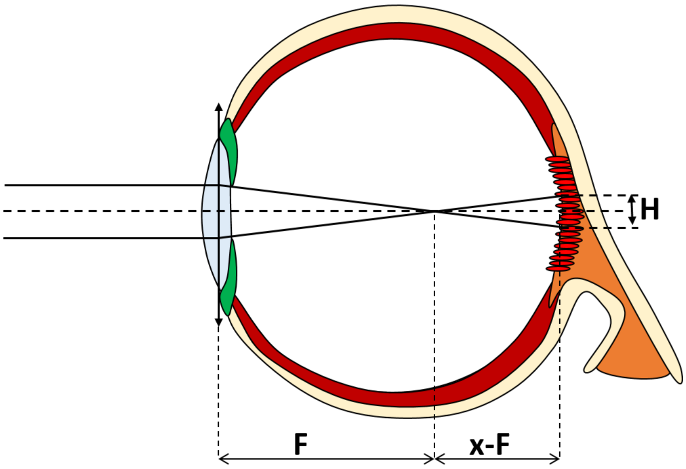
Ф11.3-1 Известно, что диаметр человеческого зрачка днём составляет около $d = 4$ мм. Определите разрешающую способность при наблюдении далёких объектов невооружённым близоруким глазом с дефектом зрения $\Delta = -2$ дптр. Дифракцией можно пренебречь.
Примечание: дефект зрения для близорукого глаза равен оптической силе линзы, которую необходимо использовать человеку для фокусировки на далёких объектах.

Ответ. $0{,}46°$

Решение. Разрешающая способность глаза - это минимальный угол между направлениями на два точечных источника, необходимый для того, чтобы человек смог распознать их как две отдельные точки (далее для угла между направлениями на источники будет использоваться термин «угловое расстояние»).
Пусть x - расстояние от хрусталика (собирающей линзы глаза) до сетчатки, на которой строится изображение. Ввиду малости углов, с которыми нам предстоит работать, можем считать, что двум источникам на угловом расстоянии a будет соответствовать пара изображений на сетчатке на линейном расстоянии $a{\cdot}x$ друг от друга (чтобы понять это, достаточно проследить ход лучей, прошедших через центр хрусталика без преломления).



При неточной фокусировке хрусталика точечные источники света создают на сетчатке не точечные изображения, а светлые пятна размером H. При этом если угловое расстояние a между двумя источниками таково, что $a \cdot x < H$, пятна от них сливаются и человеку становится трудно разрешить эти источники. Таким образом, разрешение глаза будет равно $a_{min} = \frac{H}{x}$.



Займёмся поиском H. При наблюдении далёких источников света глаз принимает параллельные пучки лучей. Для их фокусировки на сетчатке должно выполняться условие $F_0 = x$ или $D_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{1}{x}$, но близорукому человеку для этого приходится использовать линзу с оптической силой Δ, т.е. для реальной оптической силы D его максимально расслабленного хрусталика верно соотношение $D_0 = D + \Delta$ или $D = D_0 - \Delta = \frac{1}{x} - \Delta$. Или, наконец:

$$F = \frac{1}{\frac{1}{x} - \Delta} = \frac{x}{1 - x \cdot \Delta}$$

Рассмотрим ход крайних лучей пучка, попадающих в зрачок. Они приходят в сетчатку на расстоянии H друг от друга. В силу подобия можем записать:

$$\frac{H}{d} = \frac{x - F}{F} = \frac{x}{F} - 1 = (1 - x \cdot \Delta) - 1 = -x \cdot \Delta \Rightarrow H = -x \cdot \Delta \cdot d$$

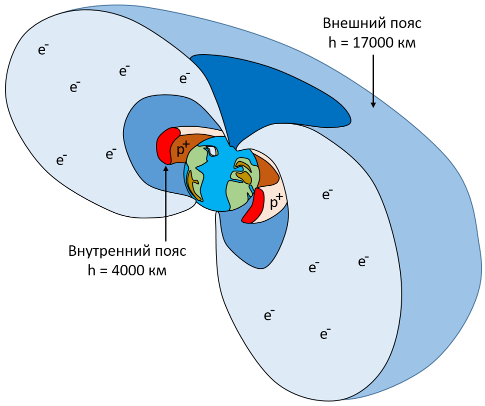
Наконец, разрешающая способность:

$$a_{min} = \frac{H}{x} = \frac{-x \cdot \Delta \cdot d}{x} = -\Delta \cdot d = 0,008 \text{ радиан} \approx 0,46^\circ$$

Это примерно в 28 раз хуже, чем стандартное разрешение человеческого глаза (1'). Прямая пропорциональность между конечным результатом и d объясняет, почему при фокусировке помогают диафрагмы в виде небольшого (до 1 мм) отверстия в непрозрачном материале или прищур.

Критерии оценивания.
Связь между угловым смещением объекта и его положением на сетчатке — 1 балл.
Условие разрешимости пары источников — 1 балл.
Выражение для фокусного расстояния глаза — 1 балл.
Выражение размеров пятна от точечного источника на сетчатке — 1 балл.
Итоговое выражение и ответ — 1 балл.

Ф11.4-1 Радиационные пояса Аллена - два пояса заряженных частиц, которые удерживаются от падения на Землю действием магнитного поля. Внутренний пояс состоит в основном из протонов и находится на высоте $h_1 = 4000$ км над поверхностью Земли, а внешний расположился на высоте $h_2 = 17000$ км и содержит в основном электроны. Оцените среднюю скорость дрейфа по долготе (на восток или на запад - выберите верное направление) для частиц внутреннего пояса Аллена вблизи плоскости экватора. Радиус Земли равен $r_0 = 6400$ км; индукция земного магнитного поля направлена вдоль поверхности, составляет $B_0 = 50$ мкТл на нулевой высоте и убывает как куб расстояния до центра планеты. Электростатическим взаимодействием между частицами можно пренебречь.



Ответ. 3,3 мм/с на восток.

Решение.
В дальнейшем решении будет присутствовать индекс i, равный 1 для внутреннего пояса (протонов) и 2 для внешнего пояса (электронов). Выразим основные величины, задающие движение в поясах:

Радиус i-го пояса:

$$r_i = r_0 + h_i;$$

Гравитационное ускорение частиц (g_0 - ускорение свободного падения на поверхности Земли):

$$g_i = \left(\frac{r_0}{r_i}\right)^2 g_0;$$

Индукция магнитного поля:

$$B_i = \left(\frac{r_0}{r_i}\right)^3 B_0;$$

На заряженную частицу массой m_i и зарядом e_i, движущуюся со скоростью $\vec{v_i}$ перпендикулярно линиям магнитного поля в плоскости экватора, действует сила тяжести $m_i\vec{g_i}$ и сила Лоренца $e_i \cdot \vec{v_i} \times \vec{B_i}$. Скорость $\vec{v_i}$ можно представить как $\vec{u_i} + \Delta\vec{v_i}$, где $\vec{u_i}$ - скорость движения, при которой сила Лоренца компенсирует силу тяжести: $e_i \cdot \vec{u_i} \times \vec{B_i} = -m_i\vec{g_i}$. Тогда суммарная сила, действующая на частицу равна:

$$m_i\vec{g_i} + e_i \cdot (\vec{u_i} + \Delta\vec{v_i}) \times \vec{B_i} = m_i\vec{g_i} + e_i \cdot \vec{u_i} \times \vec{B_i} + e_i \cdot \Delta\vec{v_i} \times \vec{B_i} = e_i \cdot \Delta\vec{v_i} \times \vec{B_i}$$

Получившаяся сила всегда лежит в плоскости экватора и перпендикулярна $\Delta\vec{v_i}$, т.е. движение частицы можно представить как вращение со скоростью $|\Delta\vec{v_i}|$ по окружности вокруг центра, который сам дрейфует в плоскости экватора со скоростью $\vec{u_i}$. На достаточно длительных временных интервалах средняя скорость кругового движения стремится к нулю и нас не интересует, поэтому задача сводится к поиску $\vec{u_i}$:

$$|e_i \cdot \vec{u_i} \times \vec{B_i}| = |-m_i\vec{g_i}| \Rightarrow e^+ u_i B_i = m_i g_i \Rightarrow u_i = \frac{m_i g_i}{e^+ B_i} = \frac{m_i g_0}{e^+ B_0} \cdot \frac{r_i}{r_0} = \frac{m_i g_0}{e^+ B_0} \cdot (1 + \frac{h_i}{r_0})$$

Подставляя численные значения, получим для пояса протонов: $u_1 = 3,3$мм/с;
и для пояса электронов: $u_2 = 4,1$мкм/с.

Линии индукции магнитного поля Земли направлены с юга на север (магнитные полушария противоположны географическим). Следовательно, чтобы ощутить действие силы Лоренца, противонаправленной силе тяжести, положительные заряды (протоны) должны дрейфовать на восток, а отрицательные (электроны) - на запад.

Отдельно отметим, что итоговые скорости на порядки меньше характерных скоростей на околоземных орбитах (единицы км/с), что позволяет нам не учитывать вклад кривизны траектории и связанных с ней ускорений.

Критерии оценивания.
Корректная связь $\vec{g}$ и $\vec{B}$ с расстоянием в ходе всего решения — 1 балл.
Разложение скорости частицы на круговую скорость и скорость дрейфа — 1 балл.
Запись нулевой суммы сил для частицы, движущейся со скоростью дрейфа — 1 балл.
Полученное значение скорости дрейфа — 1 балл.
Обоснованный выбор направления дрейфа — 1 балл.

Указание 1: Если не указан факт колебаний частицы в магнитном поле и исследовано движение с постоянной скоростью, все пункты, кроме второго, учитываются, т.е. задача оценивается из 4-х баллов.
Указание 2: Если учитывается кривизна траектории, т.е. указано, что разность силы тяжести и силы Лоренца создаёт центростремительное ускорение, и решается возникающее квадратное уравнение, такое решение оценивается из полных 5-и баллов.