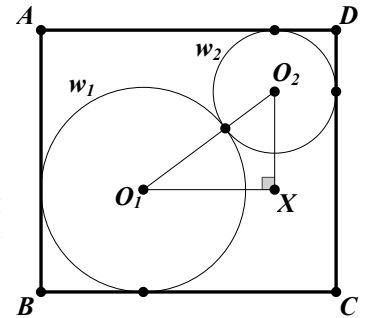


М10.1-3 Две окружности ω_1 и ω_2 расположены внутри прямоугольника $ABCD$, касаются внешним образом, причем ω_1 касается отрезков AB и BC , а ω_2 касается CD и DA . Какое наибольшее значение может принимать сумма радиусов окружностей ω_1 и ω_2 , если стороны прямоугольника равны 25 и 18?

Ответ. 13.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, а X — точка пересечения прямых, проходящих через O_1 и O_2 параллельно BC и AB соответственно. Обозначим длину отрезка O_1O_2 , равную искомой сумме радиусов, через s . Заметим, что $O_1X = BC - s$, а $O_2X = AB = s$, откуда с помощью теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2X получаем уравнение $s^2 = (18 - s)^2 + (25 - s)^2$. Корни этого уравнения $s = 13$ и $s = 73$. Заметим, что больший корень не подходит, поскольку сумма радиусов окружностей не может превосходить стороны прямоугольника.



Комментарий. Составлено квадратное уравнение на искомую величину s — 3 балла. Неверно сделан отбор корней (взят больший корень) — не более 3 баллов за задачу.

М10.2-3 Корни уравнения $x^3 - 100x^2 + cx + d = 0$ образуют геометрическую прогрессию, а сумма обратных величин к этим корням равна 10. Найдите модуль коэффициента d .

Ответ. $(\sqrt{10})^3$

Решение. Пусть b, bq, bq^2 — корни уравнения. Тогда по теореме Виета $-b(1 + q + q^2) = -100$, а $-b^3q^3 = d$. По условию

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{bq} + \frac{1}{bq^2} = \frac{1 + q + q^2}{bq^2} = 10,$$

то есть $b^2q^2 = \frac{100}{10}$. Тогда $|d| = |b^3q^3| = (\sqrt{10})^3$.

Комментарий.

М10.3-3 Число $\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2000}{2001!}$ представили в виде несократимой дроби $\frac{a}{b}$ (a и b — натуральные числа). Вычислите разность $2a - b$.

Ответ. -2 .

Решение. Заметим, что для всякого натурального k имеет место равенство $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} -$

$\frac{1}{(k+1)!}$. Тогда сумма $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ равна $\frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$, а данная сумма есть

$$\sum_{k=2}^{2000} \frac{k}{(k+1)!} = -\frac{1}{2!} + \sum_{k=1}^{2000} \frac{k}{(k+1)!} = -\frac{1}{2} + \frac{2001! - 1}{2001!} = \frac{2001! - 2}{2 \cdot 2001!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2001! - 1}{2001!}.$$

Последняя дробь несократима: в самом деле, пусть $a = \frac{1}{2} \cdot 2001!$. Тогда эта дробь представляется выражением $\frac{a-1}{2a}$. Заметим, что в числителе стоит нечётное число, а в знаменателе чётное. Заметим также, что для всякого простого делителя знаменателя $p > 2$ числитель представляется

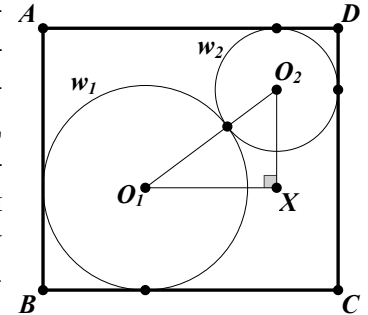
в виде $k \cdot p - 1$ и поэтому на p не делится. Итак, полученное представление суммы $\sum_{k=2}^{2000} \frac{k}{(k+1)!}$

в виде дроби $\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2001! - 1}{2001!}$ есть несократимая дробь. Значит, искомое значение $2a - b$ равно -2 .

М10.1-4 Две окружности ω_1 и ω_2 расположены внутри прямоугольника $ABCD$, касаются внешним образом, причем ω_1 касается отрезков AB и BC , а ω_2 касается CD и DA . Какое наибольшее значение может принимать сумма радиусов окружностей ω_1 и ω_2 , если стороны прямоугольника равны 32 и 25?

Ответ. 17.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, а X — точка пересечения прямых, проходящих через O_1 и O_2 параллельно BC и AB соответственно. Обозначим длину отрезка O_1O_2 , равную искомой сумме радиусов, через s . Заметим, что $O_1X = BC - s$, а $O_2X = AB = s$, откуда с помощью теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2X получаем уравнение $s^2 = (32 - s)^2 + (25 - s)^2$. Корни этого уравнения $s = 17$ и $s = 97$. Заметим, что больший корень не подходит, поскольку сумма радиусов окружностей не может превосходить стороны прямоугольника.



Комментарий. Составлено квадратное уравнение на искомую величину s — 3 балла. Неверно сделан отбор корней (взят больший корень) — не более 3 баллов за задачу.

М10.2-4 Корни уравнения $x^3 - 20x^2 + cx + d = 0$ образуют геометрическую прогрессию, а сумма обратных величин к этим корням равна 5. Найдите модуль коэффициента d .

Ответ. 8

Решение. Пусть b, bq, bq^2 — корни уравнения. Тогда по теореме Виета $-b(1 + q + q^2) = -20$, а $-b^3q^3 = d$. По условию

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{bq} + \frac{1}{bq^2} = \frac{1 + q + q^2}{bq^2} = 2,$$

то есть $b^2q^2 = \frac{20}{5} = 4$. Тогда $|d| = |b^3q^3| = 8$.

Комментарий. С помощью теоремы Виета составлена система уравнений на неизвестные параметры (см. решение) — 2 балла.

М10.3-4 Число $\frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{3000}{3001!}$ представили в виде несократимой дроби $\frac{a}{b}$ (a и b — натуральные числа). Вычислите разность $2a - b$.

Ответ. -2.

Решение. Заметим, что для всякого натурального k имеет место равенство $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$. Тогда сумма $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ равна $\frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}$, а данная сумма есть

$$\sum_{k=2}^{3000} \frac{k}{(k+1)!} = -\frac{1}{2!} + \sum_{k=1}^{3000} \frac{k}{(k+1)!} = -\frac{1}{2} + \frac{3001! - 1}{3001!} = \frac{3001! - 2}{2 \cdot 3001!} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3001! - 1}{3001!}.$$

Последняя дробь несократима: в самом деле, пусть $a = \frac{1}{2} \cdot 3001!$. Тогда эта дробь представляется выражением $\frac{a-1}{2a}$. Заметим, что в числителе стоит нечётное число, а в знаменателе чётное. Заметим также, что для всякого простого делителя знаменателя $p > 2$ числитель представляется

в виде $k \cdot p - 1$ и поэтому на p не делится. Итак, полученное представление суммы $\sum_{k=2}^{3000} \frac{k}{(k+1)!}$

в виде дроби $\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3001! - 1}{3001!}$ есть несократимая дробь. Значит, искомое значение $2a - b$ равно -2 .

Комментарий. Общее слагаемое $\frac{k}{(k+1)!}$ представлено в виде разности, указанной в решении — не менее 3 баллов за задачу.