

M11.1-5 Найдите все пары вещественных чисел (x, y) таких, что

$$\begin{cases} \cos(x + y) = 0, \\ \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Ответ. $y = \arctg \frac{5}{4} + \pi j$, $x = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{5}{4} - \pi j + 2\pi k$, где $k, j \in \mathbb{Z}$, а также $y = -\arctg \frac{5}{4} + \pi j$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi + \arctg \frac{5}{4} - \pi j + 2\pi k$, где $k, j \in \mathbb{Z}$.

Решение. Из первого уравнения получаем $x + y = \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим два случая: $l = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $l = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. В первом случае $\sin x = \cos y$, а во втором $\sin x = -\cos y$. Тогда из второго уравнения в первом случае получаем $y = \arctg \frac{5}{4} + \pi j$, $j \in \mathbb{Z}$, а во втором, соответственно, $y = -\arctg \frac{5}{4} + \pi j$, $j \in \mathbb{Z}$.

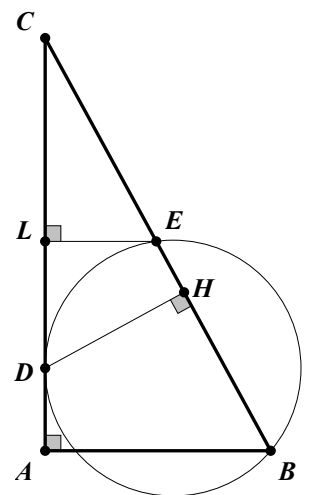
Комментарий. Верно решено только первое уравнение и других продвижений нет — 1 балл за задачу.

Ошибка при решении элементарного тригонометрического уравнения — 0 баллов за задачу.

M11.2-5 На катете AC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D , а на гипотенузе BC — точка E такие, что описанная окружность треугольника BDE касается AC . Расстояние от точки E до прямой AC равно 2, а $AB = 4$. Найдите расстояние от точки D до прямой BC .

Ответ. $h = 2\sqrt{2}$.

Решение. Пусть H — основание перпендикуляра из точки D на прямую BC , L — проекция точки E на AC , а $DH = h$. Из подобия прямоугольных треугольников LCE и HCD получаем $\frac{h}{EL} = \frac{CD}{CE}$. Аналогично и $\frac{h}{AB} = \frac{CD}{CB}$. Значит, $\frac{h^2}{2 \cdot 4} = \frac{CD^2}{CE \cdot CB}$. Но последнее отношение равно единице в силу теоремы о квадрате касательной. Значит, $h^2 = 8$ и $h = 2\sqrt{2}$.



Комментарий. Ответ получен рассмотрением частного случая (например, когда центр окружности лежит на гипотенузе) — баллы не добавляются.

M11.3-5 В магазине продаётся n чашек и n блюдец (все $2n$ товаров различны), причем $n \geq 2025$. Число способов выбрать 5 чашек и 6 блюдец — полный квадрат. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ. 2171.

Решение. Указанное число способов равно $C_n^5 \cdot C_n^6 = (C_n^5)^2 \cdot \frac{n-5}{6}$, откуда $n-5$ должно иметь вид $6t^2$ для некоторого натурального t . Поскольку $n \geq 2025$, число $t = \frac{n-5}{6}$ есть квадрат натурального числа, большего 18. Прямой проверкой убеждаемся, что $n = 6 \cdot 19^2 + 5 = 2171$ подходит.

Комментарий. Записано число способов выбрать данные объекты (через числа способов или через факториалы) — 1 балл за задачу.

Комбинаторная ошибка (двойной подсчёт, не все баллы учтены и т. п.) — 0 баллов за задачу.

M11.1-6 Найдите все пары вещественных чисел (x, y) таких, что

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 0, \\ \frac{\sin y}{\sin x} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Ответ. $y = \arctg \frac{2}{3} + \pi j$, $x = \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{1}{3} + \pi j + 2\pi k$, где $k, j \in \mathbb{Z}$, а также $y = -\arctg \frac{2}{3} + \pi j$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi - \arctg \frac{1}{3} + \pi j + 2\pi k$, где $k, j \in \mathbb{Z}$.

Решение. Из первого уравнения получаем $x - y = \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим два случая: $l = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ и $l = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. В первом случае $\sin x = \cos y$, а во втором $\sin x = -\cos y$. Тогда из второго уравнения в первом случае получаем $y = \arctg \frac{2}{3} + \pi j$, $j \in \mathbb{Z}$, а во втором, соответственно, $y = -\arctg \frac{2}{3} + \pi j$, $j \in \mathbb{Z}$.

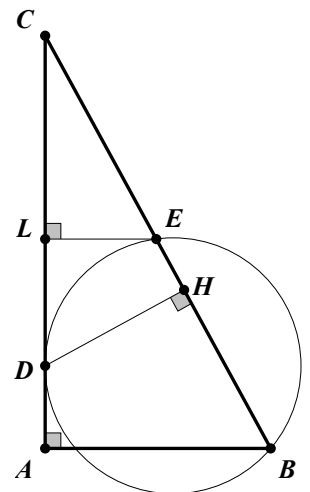
Комментарий. Верно решено только первое уравнение и других продвижений нет — 1 балл за задачу.

Ошибка при решении элементарного тригонометрического уравнения — 0 баллов за задачу.

M11.2-6 На катете AC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка D , а на гипотенузе BC — точка E такие, что описанная окружность треугольника BDE касается AC . Расстояние от точки E до прямой AC равно 2, а $AB = 8$. Найдите расстояние от точки D до прямой BC .

Ответ. $h = 4$.

Решение. Пусть H — основание перпендикуляра из точки D на прямую BC , L — проекция точки E на AC , а $DH = h$. Из подобия прямоугольных треугольников LCE и HCD получаем $\frac{h}{EL} = \frac{CD}{CE}$. Аналогично и $\frac{h}{AB} = \frac{CD}{CB}$. Значит, $\frac{h^2}{2 \cdot 8} = \frac{CD^2}{CE \cdot CB}$. Но последнее отношение равно единице в силу теоремы о квадрате касательной. Значит, $h^2 = 16$ и $h = 4$.



Комментарий. Ответ получен рассмотрением частного случая (например, когда центр окружности лежит на гипотенузе) — баллы не добавляются.

M11.3-6 В магазине продаётся n чашек и n блюдец (все $2n$ товаров различны), причем $n \geq 2025$. Число способов выбрать 6 чашек и 7 блюдец — полный квадрат. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ. 2029.

Решение. Указанное число способов равно $C_n^6 \cdot C_n^7 = (C_n^6)^2 \cdot \frac{n-6}{7}$, откуда $n-6$ должно иметь вид $7t^2$ для некоторого натурального t . Поскольку $n \geq 2025$, число $t = \frac{n-6}{7}$ есть квадрат натурального числа, большего 16. Прямой проверкой убеждаемся, что $n = 7 \cdot 17^2 + 6 = 2029$ подходит.

Комментарий. Записано число способов выбрать данные объекты (через числа способов или через факториалы) — 1 балл за задачу.

Комбинаторная ошибка (двойной подсчёт, не все баллы учтены и т. п.) — 0 баллов за задачу.