

Научно-техническая олимпиада «Старт в науку»

2024-2025 уч. года

Математика

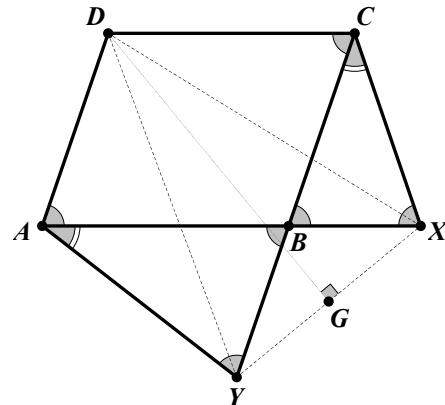
Задания, решения, критерии оценивания

М9.1-1 На лучах AB и CB , содержащих стороны параллелограмма $ABCD$ с тупым углом B , отмечены соответственно точки X и Y (отличные от B) так, что $CX = CB$ и $AY = AB$. Найдите расстояние от точки D до прямой XY , если $XY = 10$, а $\sin \angle DYX = \frac{3}{5}$.

Ответ. $\frac{15}{4}$.

Решение. Докажем, что треугольник DXY — равнобедренный. В самом деле, $\angle DCB = \angle DAB$, а $\angle XCB = 180^\circ - 2\angle CBX = 180^\circ - 2\angle ABY = \angle BAY$. Поскольку $DA = CB = CX$, а $AY = AB = CD$, треугольники ADY и CDX равны по двум сторонам и углу между ними. Остаётся найти высоту DG в треугольнике DXY : она равна $\frac{XY}{2} \cdot \operatorname{tg} \angle DYX = \frac{10}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$.

Комментарий. Доказано, что $DY = DX$ — 3 балла.



М9.2-1 Найдите площадь множества M , состоящего из точек с координатами (x, y) , удовлетворяющими системе неравенств

$$\begin{cases} |y + |y|| \leq |x - |x||, \\ x^2 + y^2 \leq 5. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{25}{8}\pi$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство системы. При $y \leq 0$ его левая часть равна нулю, а модуль любого числа неотрицателен, поэтому неравенство выполнено. При $y > 0$ неравенство принимает вид $2y \leq |x - |x||$. При $x \geq 0$ правая часть равна нулю, а левая положительна, и неравенство неверно. При $x < 0$ неравенство принимает вид

$$2y \leq |x + |x|| = 2|x| = -2x,$$

то есть $y \leq -x$. Поэтому первое неравенство задаёт всю полуплоскость $y \leq 0$ и половину второй координатной четверти $x \leq 0, y \geq 0, y \leq -x$.

Второе неравенство системы задаёт круг с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{5}$. Множество M представляет собой сектор этого круга с углом раствора $\frac{5}{4}\pi$, поэтому его площадь равна $\frac{5}{8}\pi\sqrt{5}^2 = \frac{25}{8}\pi$.

Комментарий. Верно изображено множество решений первого неравенства — не менее 3 баллов за задачу.

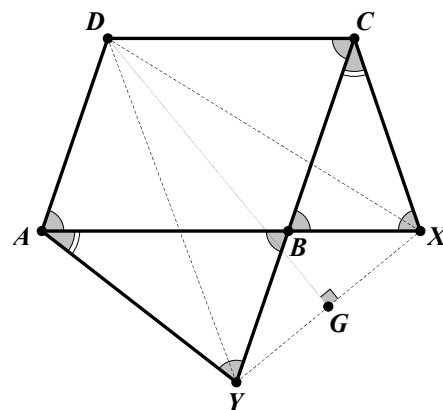
М9.3-1 Сколько четырёхзначных натуральных чисел имеют в своей записи ровно две различных цифры одинаковой чётности?

Ответ. 252.

Решение. Пусть используются две нечётных цифры. Их можно выбрать C_5^2 способами, а составить из них число $(C_4^1 + C_4^2 + C_4^3)$ способами (выбирается количество мест, на котором стоит меньшая из этих цифр). Пусть теперь используются две чётные и отличные от нуля цифры. Для этого случая аналогичным образом получаем $C_4^2 \cdot (C_4^1 + C_4^2 + C_4^3)$ способа. Наконец, пусть число составлено из двух чётных цифр, одна из них равна нулю. Тогда вторую цифру можно выбрать C_4^1 способами, а составить из двух этих цифр число — $(C_3^1 + C_3^2 + C_3^3)$ способами (на первом месте не может стоять ноль). В итоге получаем, что таких чисел $C_5^2 \cdot (C_4^1 + C_4^2 + C_4^3) + C_4^2 \cdot (C_4^1 + C_4^2 + C_4^3) + C_4^1 \cdot (C_3^1 + C_3^2 + C_3^3) = 252$.

Комментарий. Найдено количество подходящих чисел, состоящих из нечётных цифр — 2 балла. Найдено количество подходящих чисел, состоящих из чётных цифр — 3 балла.

М9.1-2 На лучах AB и CB , содержащих стороны параллелограмма $ABCD$ с тупым углом B , отмечены соответственно точки X и Y (отличные от B) так, что $CX = CB$ и $AY = AB$. Найдите расстояние от точки D до прямой XY , если $XY = 20$, а $\sin \angle DYX = \frac{4}{5}$.



Ответ. $\frac{40}{3}$.

Решение. Докажем, что треугольник DXY — равнобедренный. В самом деле, $\angle DCB = \angle DAB$, а $\angle XCB = 180^\circ - 2\angle CBX = 180^\circ - 2\angle ABY = \angle BAY$. Поскольку $DA = CB = CX$, а $AY = AB = CD$, треугольники ADY и CDX равны по двум сторонам и углу между ними. Остаётся найти высоту DG в треугольнике DXY : она равна $\frac{XY}{2} \cdot \operatorname{tg} \angle DYX = \frac{20}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{40}{3}$.

Комментарий. Доказано, что $DY = DX$ — 3 балла.

М9.2-2 Найдите площадь множества M , состоящего из точек с координатами (x, y) , удовлетворяющими системе неравенств

$$\begin{cases} |y + |y|| \geq |x + |x||, \\ x^2 + y^2 \leq 7. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{35}{8}\pi$.

Решение. Рассмотрим первое неравенство системы. При $x \leq 0$ его правая часть равна нулю, а модуль любого числа неотрицателен, поэтому неравенство выполнено. При $x > 0$ неравенство принимает вид $|y + |y|| \geq 2x$. При $y \leq 0$ левая часть равна нулю, а правая положительна, и неравенство неверно. При $y > 0$ неравенство принимает вид

$$2x \leq |y + |y|| = 2|y| = 2y,$$

то есть $y \geq x$. Поэтому первое неравенство задаёт всю полуплоскость $x \leq 0$ и половину первой координатной четверти $x \geq 0, y \geq 0, y \geq x$.

Второе неравенство системы задаёт круг с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{7}$. Множество M представляет собой сектор этого круга с углом раствора $\frac{5}{4}\pi$, поэтому его площадь равна $\frac{5}{8}\pi\sqrt{7}^2 = \frac{35}{8}\pi$.

Комментарий. Верно изображено множество решений первого неравенства — не менее 3 баллов за задачу.

М9.3-2 Сколько пятизначных натуральных чисел имеют в своей записи ровно две различных цифры одинаковой чётности?

Ответ. 540.

Решение. Пусть используются две нечётных цифры. Их можно выбрать C_5^2 способами, а составить из них число $(C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4)$ способами (выбирается количество мест, на котором стоит меньшая из этих цифр). Пусть теперь используются две чётные и отличные от

нуля цифры. Для этого случая аналогичным образом получаем $C_4^2 \cdot (C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4)$ способа. Наконец, пусть число составлено из двух чётных цифр, одна из них равна нулю. Тогда вторую цифру можно выбрать C_4^1 способами, а составить из двух этих цифр число — $(C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4)$ способами (на первом месте не может стоять ноль). В итоге получаем, что таких чисел $C_5^2 \cdot (C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4) + C_4^2 \cdot (C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4) + C_4^1 \cdot (C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4) = 540$.

Комментарий. Найдено количество подходящих чисел, состоящих из нечётных цифр — 2 балла. Найдено количество подходящих чисел, состоящих из чётных цифр — 3 балла.