

Ф11.1-5 В XVII-XVIII веках были распространены так называемые воздушные телескопы. Это телескопы с длинной трубой (или вообще без неё), где объектив и окуляр были соединены лишь направляющими. Производители телескопов той эпохи обнаружили, что объективы с очень большим фокусным расстоянием не имеют заметной хроматической аберрации. Все телескопы в то время были рефракторами, то есть состояли из двух собирающих двояковыпуклых софокусных линз. Давайте рассмотрим рекордный телескоп Христиана Гюйгенса. Линзы изготовлены из стекла ($n = 1.5$). Диаметр объектива составляет 22 см, а фокусное расстояние окуляра — 30 мм. Однако наточить длиннофокусный объектив было тяжело, и оказался дефектным, и его радиус кривизны зависит от угла ϕ по закону:

$$R(\phi) = R_0 + \kappa \cdot \phi.$$

Где $R_0 = 210$ футов = 64 метра, а $\kappa = 60$ м/рад. Из-за дрожания атмосферы звёзды представляют собой круг диаметром 1 угловую секунду. Необходимо найти, какой угловой размер звёзд видел Гюйгенс.

Ф11.1-6 В XVII-XVIII веках были распространены так называемые воздушные телескопы. Это телескопы с длинной трубой (или вообще без неё), где объектив и окуляр были соединены лишь направляющими. Производители телескопов той эпохи обнаружили, что объективы с очень большим фокусным расстоянием не имеют заметной хроматической аберрации. Все телескопы в то время были рефракторами, то есть состояли из двух собирающих двояковыпуклых софокусных линз. Давайте рассмотрим рекордный телескоп Христиана Гюйгенса. Линзы изготовлены из стекла ($n = 1.5$). Диаметр объектива составляет 33 см, а фокусное расстояние окуляра — 30 мм. Однако наточить длиннофокусный объектив было тяжело, и оказался дефектным, и его радиус кривизны зависит от угла ϕ по закону:

$$R(\phi) = R_0 + \kappa \cdot \phi.$$

Где $R_0 = 210$ футов = 64 метра, а $\kappa = 40$ м/рад. Из-за дрожания атмосферы звёзды представляют собой круг диаметром 1 угловую секунду. Необходимо найти, какой угловой размер звёзд видел Гюйгенс.

Решение.

Телескоп состоит из объектива и окуляра — двояковыпуклых линз. Фокусное расстояние двояковыпуклой линзы определяется формулой шлифовщика линзы:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

Где R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхностей. При чем знаки определяются следующим образом: смотрим со стороны хода лучей. Если линза выпукла «на нас», то берем со знаком плюс $R_1 = R(\phi)$, а если «от нас», то берем с минусом $R_2 = -R(\phi)$:

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R(\phi)} - \frac{1}{-R(\phi)} \right) = (n - 1) \cdot \frac{2}{R(\phi)}, F(x)$$

$$F(x) = \frac{R(\phi)}{2(n - 1)}.$$

В идеальной системе фокус был бы на расстоянии

$$F_0 = \frac{R_0}{2(n - 1)}.$$

Найдем максимальный угол.

$$\varphi_{max} = \arctg\left(\frac{D}{2F_0}\right) \approx \frac{D}{2F_0}.$$

Найдем зависимость от высоты:

$$F(x) = \frac{1}{2(n-1)}\left(R_0 + \kappa\left(\frac{x}{F_0}\right)\right)$$

Линейный размер в фокальной плоскости:

$$h = \rho F(x)$$

Тогда понимая, что длинна телескопа $L = F + f = 64030$ мм. фиксирована. То угол под которым видно изображение в фокальной плоскости

$$\alpha = \rho \frac{F(x)}{L - F(x)}$$

Видно, что функция угла от фокусного расстояния объектива возрастает, а значит этот угол будет максимальный, при наибольшем фокусном расстоянии. Понятно что изображение для наблюдателя будет немного в расфокусе, но мы наблюдаем звезды, поэтому пренебрежём этим, нас больше интересует угловой размер, чем качество изображения.

$$\alpha_{max} = \rho \frac{\left(R_0 + \kappa\left(\frac{D}{2F_0}\right)\right)}{L - \left(R_0 + \kappa\left(\frac{D}{2F_0}\right)\right)} = 1 \cdot \frac{(64000 + 6000\left(\frac{220}{2 \cdot 64000}\right))}{64030 - (64000 + 6000\left(\frac{220}{2 \cdot 64000}\right))} = 3250'' \approx 0.9^\circ$$

Заметим, что без учета дефекта линзы:

$$\alpha_{min} = \rho \frac{R_0}{L - R_0} = 1 \cdot \frac{64000}{64030 - 64000} = 2130'' \approx 0.6^\circ$$

Отметим также, что телескопы Гершеля, хотя и позволяли достигать очень большого увеличения (до 7000 раз), но на практике наблюдатель использовал увеличения 150–300, что в первую очередь диктовалось погодными условиями. Только при рассмотрении планетарных туманностей и двойных звёзд применялись увеличения от 500 до 3000

Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Вычислено максимальное фокусное расстояние или угол.	1
2	Правильно применена формула шлифовщика.	1
3	Получен второй конец фокального отрезка.	1
4	Получена формула углового размера от фокусного расстояния.	1
5	Проанализирована формула для углового размера и получен ответ.	1

Ф11.2-5 Слинки - игрушка, представляющая из себя мягкую массивную пружинку. Количество витков слинки обычно достаточно велико, а их толщина крайне мала. Из-за её строения у неё наблюдается много интересных свойств. Например, полностью растянутая под действием силы тяжести пружинка слинки, подвешенная за верхний виток после отпускания быстро сожмётся так, что нижние витки практически не сдвинутся. В нерастянутом состоянии витки практически не деформированы. Масса слинки $m = 100$ г, а длина в растянутом состоянии равна $L = 1,2$ м. На какой высоте от её конца находится положение центра масс слинки. Оцените энергию потерь при таком «схлопывании» слинки, которые возникают из-за неупругих соударений витков друг с другом.

Ф11.2-6 Слинки - игрушка, представляющая из себя мягкую массивную пружинку. Количество витков слинки обычно достаточно велико, а их толщина крайне мала. Из-за её строения у неё наблюдается много интересных свойств. Например, полностью растянутая под действием силы тяжести пружинка слинки, подвешенная за верхний виток после отпущения быстро сожмётся так, что нижние витки практически не сдвинутся. В нерастянутом состоянии витки практически не деформированы. Масса слинки $m = 150$ г, а длина в растянутом состоянии равна $L = 1,5$ м. На какой высоте от её конца находится положение центра масс слинки. Оцените энергию потерь при таком «схлопывании» слинки, которые возникают из-за неупругих соударений витков друг с другом.

Решение.

Разобьём слинки на N одинаковых кусочков (витков) одинаковой массы. Натяжение в n -ом витке с нижнего конца будет равно

$$T(n) = (n - 1) \frac{mg}{N}$$

Растяжение витка (жёсткость одного витка равна Nk):

$$l(n) = (n - 1) \frac{mg}{N^2 k}$$

Длина и растяжение витков слинки будут сравнимы друг с другом, потому длина растянутой слинки равна (С учётом, что число витков много больше 1):

$$L = \sum_{i=0}^N l(n) = \frac{N(N-1)}{2} \frac{mg}{N^2 k} \approx \frac{mg}{2k}$$

Энергия деформация слинки будет равна:

$$E_{deform} = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} k N l(i)^2 = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} N k \left((i-1) \frac{mg}{N^2 k} \right)^2 \approx \frac{1}{6} \frac{(mg)^2}{k}$$

Таким образом,

$$E_{deform} = \frac{1}{3} mgL$$

Вычислим положение центра масс.

$$h = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^N \frac{m}{N} (x_i - \frac{1}{2} l(i)) = \frac{mg}{2N^3 k} \sum_{i=0}^N ((i-1)i - (i-1)) = \frac{mg}{2N^3 k} \sum_{i=0}^N (i-1)^2$$

Получаем:

$$h \approx \frac{mg}{2N^3 k} \frac{(N-1)^3}{3} \approx \frac{mg}{6k} = \frac{L}{3}$$

Можем также рассчитать скорость центра масс сразу после схлопывания (так как он находится в свободном падении с ускорением g):

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

Таким образом, кинетическая энергия слинки сразу после схлопывания:

$$E_{kin} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{3} mgL$$

№	Пункт критериев	Балл
1	Расчитана длина слинки через массу слинки и её жесткость.	1
2	Получена полная энергия деформации.	1
3	Получено положение центра масс растянутой слинки.	1
4	Посчитаны потери энергия	2

А энергия потерь:

$$E_{loss} = E_{deform} + mgh - E_{kin} = \frac{1}{3}mgL$$

Критерии проверки.

Ф11.3-5 При исследовании астероидов и спутников планет с каменной поверхностью большой проблемой является налипание пыли на проводящие поверхности исследовательских аппаратов. Подобные спутники не имеют магнитного поля, в силу чего пылинки оказываются заряжаются из-за космических лучей с характерным зарядом $q \approx 3$ нКл и радиусом $r \approx 150$ мкм. Считая что проводящая поверхность космического аппарата представляет собой плоскость оцените какой потенциал необходимо сообщить поверхности, чтобы пылинки не налипали.

Ф11.3-6 При исследовании астероидов и спутников планет с каменной поверхностью большой проблемой является налипание пыли на проводящие поверхности исследовательских аппаратов. Подобные спутники не имеют магнитного поля, в силу чего пылинки оказываются заряжаются из-за космических лучей с характерным зарядом $q \approx 1,5$ нКл и радиусом $r \approx 200$ мкм. Считая что проводящая поверхность космического аппарата представляет собой плоскость оцените какой потенциал необходимо сообщить поверхности, чтобы пылинки не налипали.

Решение.

Запишем закон сохранения энергии в случае, когда пылинка летит навстречу плоскости. Пылинка прилипнет, если энергия взаимодействия плоскости и пылинки будет отрицательной. Следовательно, пренебрегая кинетической энергией пылинки, запишем энергию пылинки как сумму энергий от взаимодействия с зарядом плоскости и индуцированным изображением пылинки.

$$E = q\varphi_s + q\varphi_i$$

Так как поле вне пылинки совпадает с полем точечного заряда, то потенциал изображения будет равен $\varphi_i = -k\frac{q}{2r}$. Также, из-за малости размера пылинки пренебрежем отличием потенциала плоскости и потенциала в центре пылинки.

С учётом того, что условие налипания $E = 0$, получим

$$\varphi_s = k\frac{q}{2r} = 9 \text{ кВ.}$$

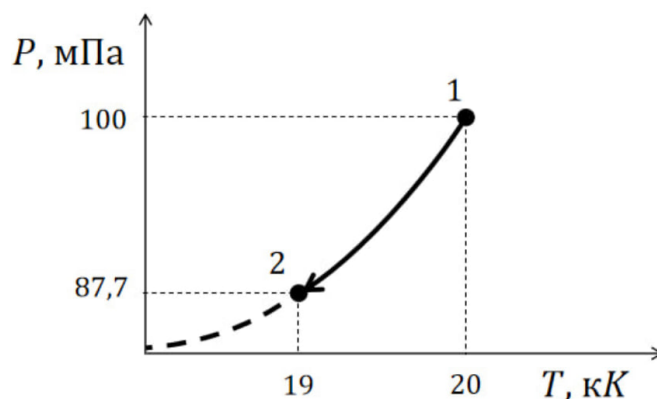
Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Получено условие прилипания пылинки.	2
2	Получен потенциал изображения пылинки.	2
3	Получено выражение для потенциала плоскости и ответ.	1

Ф11.4-5 Один моль идеального газа подвергается адиабатическому сжатию, в результате которого его давление увеличивается в 2,7 раза. Начальная температура газа составляет $T_1 = 300$ К, а конечная температура достигает $T_2 = 399$ К. Затем один моль того же газа адиабатически

расширяется в рабочей камере плазменного двигателя, находящегося в условиях космического вакуума. Используя график процесса, изображенный на рисунке, определите степень диссоциации газа. Оцените энергию диссоциации одного моля молекул газа. Помните, что низкое давление и экстремально высокая температура способствуют значительной диссоциации молекул.

Ф11.4-6 Один моль идеального газа подвергается адиабатическому сжатию, в результате которого его давление увеличивается в 2,23 раза. Начальная температура газа составляет $T_1 = 400$ К, а конечная температура достигает $T_2 = 499$ К. Затем один моль того же газа адиабатически расширяется в рабочей камере плазменного двигателя, находящегося в условиях космического вакуума. Используя график процесса, изображенный на рисунке, определите степень диссоциации газа. Оцените энергию диссоциации одного моля молекул газа. Помните, что низкое давление и экстремально высокая температура способствуют значительной диссоциации молекул.



Решение.

Уравнение адиабаты для идеального газа:

$$PV^\gamma = \text{const}$$

Переходя к переменным T и P , получаем:

$$PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const}$$

Введем коэффициент $\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1}$. Тогда для отношения давлений:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^\alpha$$

Выражая α :

$$\alpha = \frac{\ln \frac{P_1}{P_2}}{\ln \frac{T_1}{T_2}}$$

Подставляя численные значения, находим $\alpha \approx 3,48$, что близко к 3,5. Это значение соответствует показателю адиабаты $\gamma = \frac{7}{5}$, характерному для двухатомного газа. Таким образом, молекула газа состоит из двух атомов.

Аналогичный расчет для второго процесса в рабочей камере двигателя дает показатель адиабаты $\gamma = 1,644$. Это говорит о том, что при данных условиях молекулы газа начинают диссоциировать. Теперь вклад в изобарную и изохорную теплоемкость вносят как молекулы изначального газа, так и новые молекулы атомарного газа. Распишем, как показатель адиабаты зависит от степени диссоциации:

Показатель адиабаты:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Изобарная теплоемкость:

$$C_p = \frac{i+2}{2}\nu R$$

Изохорная теплоемкость:

$$C_V = \frac{i}{2}\nu R$$

Вспоминая, что для двухатомного газа (изначального, до диссоциации) $i = 5$, а для одноатомного (после диссоциации) $i = 3$, а также учитывая, что при диссоциации одной двухатомной молекулы образуются два атома, получаем:

$$C_p = \frac{7}{2}R(1 - \alpha) + 5R\alpha$$

$$C_V = \frac{5}{2}R(1 - \alpha) + 3R\alpha$$

Итого, показатель адиабаты зависит от степени диссоциации газа следующим образом:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7 + 3\alpha}{5 + \alpha}$$

Подстановка показателя адиабаты, рассчитанного ранее в этом же пункте, дает значение для степени диссоциации $\alpha = 0,9$ (большинство молекул продиссоциировали). Тогда энергию диссоциации можно оценить как энергию теплового движения молекул:

$$E \sim RT \approx 166 \text{ кДж/моль}$$

Для сравнения, энергия диссоциации молекул водорода составляет 436 кДж/моль, что указывает на то, что оценка по порядку величины оценка является справедливой.

Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Записано уравнение для адиабаты и получено выражение для показателя адиабаты.	1
2	Определено число атомов в молекуле газа.	1
3	Верно записаны выражения для изобарной и изохорной теплоемкостей смеси	1
4	Получен верный ответ для степени диссоциации	1
5	Получен верный и обоснованный ответ для энергии диссоциации	1