

Ф9.1-1 На заводе по переработке нефтепродуктов в чане с остатками производства после длительного отстоя образовались три слоя: водяной, толщиной $a = 1$ метр, слой масел толщиной $b = 0,5$ м и слой вязкой парафиновой смеси, толщиной $c = 0,2$ м. Невесомый пузырёк газа объемом 1 мм^3 образовался на дне сосуда. Причём, двигаясь в вязкой парафиновой смеси, на пузырёк действовало постоянное ускорение такой величины, что всплыв на поверхность он на ней остановился. Определите общее время подъема пузырька. Плотность воды равна $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность масел $\rho_2 = 0.8\rho_1$.

Указание: считайте, что эффективная масса пузырька при движении с ускорением в невязкой жидкости равна массе вытесненной им жидкости.

Ф9.1-2 На заводе по переработке нефтепродуктов в чане с остатками производства после длительного отстоя образовались три слоя: водяной, толщиной $a = 0,7$ метра, слой масел толщиной $b = 0,3$ м и слой вязкой парафиновой смеси, толщиной $c = 0,1$ м. Невесомый пузырёк газа объемом 1 мм^3 образовался на дне сосуда. Причём, двигаясь в вязкой парафиновой смеси, на пузырёк действовало постоянное ускорение такой величины, что всплыв на поверхность он на ней остановился. Определите общее время подъема пузырька. Плотность воды равна $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность масел $\rho_2 = 0.8\rho_1$.

Указание: считайте, что эффективная масса пузырька при движении с ускорением в невязкой жидкости равна массе вытесненной им жидкости.

Решение.

В первом и втором слое пузырёк всплывает равноускорено под действием силы Архимеда с ускорением $a = F_A/m_{\text{эфф.}} = g$, но оно направлено вертикально вверх. Время всплытия для этих двух слоёв будет равно $t_1 = \sqrt{2(a+b)/g}$. За время всплытия он приобретёт скорость $v = gt = \sqrt{2(a+b)g}$. Двигаясь равномерно в последнем слое пузырёк движется время $t_2 = 2c/v$. Итого время всплытия составит $t = t_1 + t_2 = \sqrt{2(a+b)/g} + 2c/v$.

Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Получено выражение для ускорения движения пузырька.	2
2	Найдено время прохождения первых двух слоёв.	1
3	Найдено время движения в последнем слое.	1
4	Получен ответ.	1

Ф9.2-1 При выращивании некоторых многолетних сельскохозяйственных культур важно, чтобы плодородный слой земли зимой не промерзал полностью. Рассмотрим ферму, в которой плодородный слой земли имеет глубину $h = 60$ см, а под плодородным слоем расположен песчаный суглинок, который почти не пропускает воду и имеет низкий коэффициент теплопроводности. Согласно прогнозу погоды ночью на вторник выпадет $m = 3$ кг на квадратный метр снега и обещают солнечный день и среднесуточную температуру воздуха 1°C . В среду среднесуточная температура упадёт до -1°C , после чего снова потеплеет. Промёрзнет ли земля? Испарением пренебречь.

Теплоемкость земли равна $1 \text{ кДж/кг} \cdot ^\circ\text{C}$. Плотность земли 2700 кг/м^3 . Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг . Коэффициент теплоотдачи из воздуха в почву с учетом всех факторов порядка $10 \text{ Вт/м}^2 \cdot ^\circ\text{C}$.

Ф9.2-2 При выращивании некоторых многолетних сельскохозяйственных культур важно, чтобы плодородный слой земли зимой не промерзал полностью. Рассмотрим ферму, в которой плодородный слой земли имеет глубину $h = 60$ см, а под плодородным слоем расположен песчаный

суглинок, который почти не пропускает воду и имеет низкий коэффициент теплопроводности. Согласно прогнозу погоды ночью на вторник выпадет $m = 4$ кг на квадратный метр снега и обещают солнечный день и среднесуточную температуру воздуха 1°C . В среду среднесуточная температура упадёт до -2°C , после чего снова потеплеет. Промёрзнет ли земля? Испарением пренебречь.

Теплоемкость земли равна $1 \text{ кДж/кг} \cdot ^\circ\text{C}$. Плотность земли 2700 кг/м^3 . Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг . Коэффициент теплоотдачи из воздуха в почву с учетом всех факторов порядка $10 \text{ Вт/м}^2 \cdot ^\circ\text{C}$.

Решение.

Заметим, что за сутки на 1 метр квадратный почвы будет передано не более чем $Q_1 = \kappa \Delta T t$, где ΔT – максимальная разница температур. С другой стороны для промерзания земли её температура должна понизиться до 0°C и растаявший снег замёрзнуть. Требуемое тепло на 1 метр квадратный больше чем $Q_2 = \lambda m_{\text{сн.}} + \rho_{\text{зем.}} h \Delta T_1$, где ΔT – разница температур между 0°C и начальной температурой. Подставив числа заметим, что $Q_1 < Q_2$, а значит земля не промерзнет.

Критерии проверки.

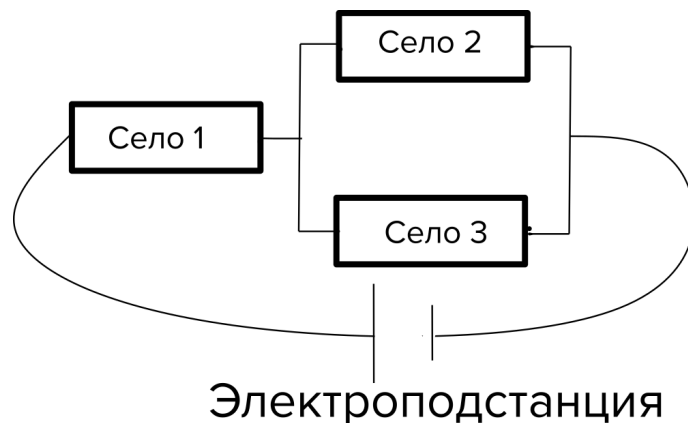
№	Пункт критериев	Балл
1	Получена оценка на теплоту, получаемую от воздуха.	2
2	Получена оценка на теплоту, необходимую для остывания промерзания.	2
3	Получено то, что почва не замёрзнет.	1

Ф9.3-1 Линия электропередач представляет собой два длинных провода один из которых подключается к «плюсу» электростанции, а второй к «минусу». От электроподстанции в удалённые три села, расположенных в вершинах правильного треугольника со стороной $a = 2$ км идёт линия электропередач. Возле ближайшего к станции села, расположенного на расстоянии $l = 3$ км, каждый кабель разделяется на два и идёт к двум другим сёлам вдоль сторон треугольника. В конечных сёлах линия замыкается на нагрузку потребителей электричества, а в промежуточном нагрузка подключается к «плюсовому» проводу перед ветвлением. Оцените, какая мощность теряется на линиях электропередач, если напряжение на подстанции $U = 3$ кВ, эффективное сопротивление сёл $R = 1$ МОм. Сопротивление одного метра провода равно $r = 1.75 \cdot 10^{-4} \text{ Ом/м}$.

Ф9.3-2 Линия электропередач представляет собой два длинных провода один из которых подключается к «плюсу» электростанции, а второй к «минусу». От электроподстанции в удалённые три села, расположенных в вершинах правильного треугольника со стороной $a = 3$ км идёт линия электропередач. Возле ближайшего к станции села, расположенного на расстоянии $l = 5$ км, каждый кабель разделяется на два и идёт к двум другим сёлам вдоль сторон треугольника. В конечных сёлах линия замыкается на нагрузку потребителей электричества, а в промежуточном нагрузка подключается к «плюсовому» проводу перед ветвлением. Оцените, какая мощность теряется на линиях электропередач, если напряжение на подстанции $U = 3$ кВ, эффективное сопротивление сёл $R = 1$ МОм. Сопротивление одного метра провода равно $r = 1.75 \cdot 10^{-4} \text{ Ом/м}$.

Решение.

Нарисуем эквивалентную схему для электроснабжения сёл.



Полное сопротивление данной схемы будет равно $R_0 \approx 3/2R$. Тогда, ток в схеме будет равен $I = U/R_0$. Считая что ток разделяется пополам между селом 2 и селом 3, запишем мощность джоулевых потерь на проводах:

$$W = 2I^2rl + 4(I/2)^2ra.$$

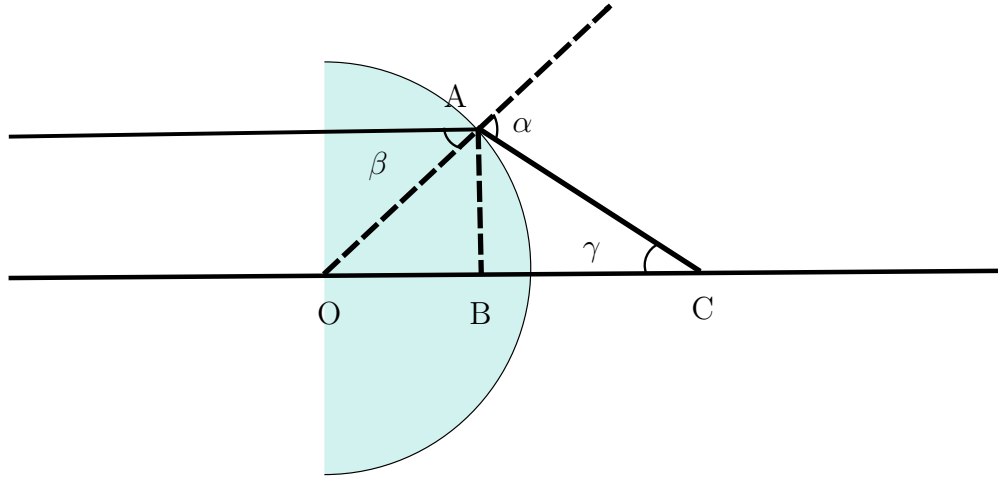
Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Получена эквивалентная электрическая схема.	2
2	Найдено общее сопротивление схема.	1
3	Найден ток в цепи.	1
4	Получено выражение для мощности и ответ.	1

Ф9.4-1 В обсерватории пропало электричество. Астрономы решили не терять времени зря и запасти электроэнергию на ночь, для этого они решили установить линзу в форме полуцилиндра (радиус основания $R = 1$ м, высота $H = 0,5$ м, показатель преломления $n = 1.5$) в крышу, чтобы собрать лучи на солнечную панель (длина панели $H = 0,5$ м, ширина $2L = 1$ м). Какая длина фокусного отрезка такой линзы? Где следует установить солнечную панель, чтоб собрать наибольшее количество лучей? Считайте, что штатив позволяет обеспечивать нормальное падение лучей на линзу.

Ф9.4-2 В обсерватории пропало электричество. Астрономы решили не терять времени зря и запасти электроэнергию на ночь, для этого они решили установить линзу в форме полуцилиндра (радиус основания $R = 1.5$ м, высота $H = 0,4$ м, показатель преломления $n = 1.4$) в крышу, чтобы собрать лучи на солнечную панель (длина панели $H = 0,4$ м, ширина $2L = 1$ м). Какая длина фокусного отрезка такой линзы? Где следует установить солнечную панель, чтоб собрать наибольшее количество лучей? Считайте, что штатив позволяет обеспечивать нормальное падение лучей на линзу.

Решение.



Солнечные лучи можно считать параллельным пучком. Тогда рассмотрим ход лучей в линзе. Так как лучи падают нормально, на первой поверхности они не преломляются. Для второй, по закону Снеллиуса получим:

$$n \sin \beta = \sin \alpha \quad (1)$$

Для предельно преломившегося луча ($\sin \alpha_{\text{кр}} = 1$):

$$\beta_{\text{кр}} = \arcsin \frac{1}{n} \approx 38,7^\circ \quad (2)$$

Получаем ограничение на угол падения, теперь рассмотрим ход произвольного луча и найдем его пересечение с ГОО. Для треугольника АОС:

$$\beta + \gamma = \alpha \quad (3)$$

Для треугольника АОВ:

$$AB = R \sin \beta \quad (4)$$

Для треугольника АВС:

$$BC = AB \cdot \text{ctg} \gamma \quad (5)$$

Для точки пересечения получаем:

$$OC = OB + BC = R(\cos \beta + \sin \beta \cdot \text{ctg}(\alpha - \beta)) \quad (6)$$

Подставив значения $\beta_{\text{кр}} = \arcsin \frac{1}{n}$ и $\alpha_{\text{кр}} = \frac{\pi}{2}$ для предельного луча, получим один из концов фокального отрезка:

$$OC_1 = R(\cos \beta_{\text{кр}} + \sin \beta_{\text{кр}} \tan \beta_{\text{кр}}) = R \left(\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}} \right) = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (7)$$

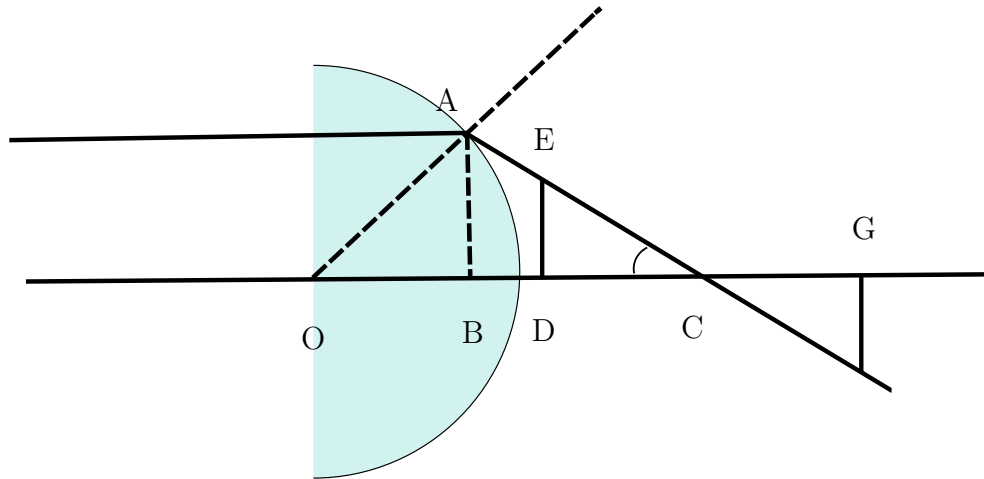
Теперь рассмотрим лучи в параксиальном приближении. В этом случае линзу можно считать тонкой с радиусами кривизны $R_1 = \infty$ и $R_2 = R$. Тогда второй конец фокального отрезка, с учетом радиуса линзы:

$$OC_2 = R + \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \frac{nR}{n-1} \quad (8)$$

Найдем длину фокального отрезка:

$$C_1C_2 = OC_2 - OC_1 = \frac{nR}{\sqrt{n-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \quad (9)$$

Найдем положение солнечной панели, при котором все лучи будут на нее попадать. Из подобия треугольников ABC_1 и DEC_1 , где DE - полстороны панели, получаем:



$$\frac{DC_1}{BC_1} = \frac{ED}{AB} \quad (10)$$

$$\frac{DC_1}{BC_1} = \frac{L}{R \sin \alpha_{кр}} \quad (11)$$

$$DC_1 = \frac{L}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (12)$$

Так как лучи распространяются по прямым и в силу симметрии:

$$C_1G = DC_1 = \frac{L}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (13)$$

Тогда панель следует установить между точками D и G :

$$OD = OC_1 - DC_1 = \frac{nR - L}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (14)$$

$$OG = OC_1 + C_1G = \frac{nR + L}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (15)$$

Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Получен конец фокального отрезка для параксиального приближения.	1
2	Получена точка пересечения ГОО для толстой линзы, найдем критический угол.	1
3	Получен второй конец фокального отрезка.	1
4	Рассмотрен предельный случай расположения панели.	1
5	Получен ответ для возможного расположения панели.	1