

Олимпиада «Физтех» .

2025 год, профиль «научно-технический».

Решения экспериментального тура.

Сыпучее трение (2.0). 10 класс.

I. Теория

Рассмотрим линейку шириной w (толщиной пренебрегаем), погружённую вертикально в сыпучий материал (гречку) на глубину h . Предположим, что давление внутри гречки нарастает *линейно* с глубиной от 0 на поверхности до некоторого значения $p(h) = \rho g h$ на глубине h .

1. Малые глубины (до критической высоты - для 9 класса).

Среднее давление на боковые стенки на глубинах от 0 до h равно $\frac{\rho g h}{2}$, так как давление возрастает линейно с высотой. Площадь боковой поверхности линейки за счёт её ширины w и погружения h равна $S = w \cdot h$.

Тогда полная *нормальная* сила, действующая на линейку за счёт давления, равна

$$N = \frac{\rho g h}{2} \cdot w \cdot h = \frac{\rho g w}{2} h^2.$$

Сила трения в сыпучей среде (в нашем случае мы будем получать величину статического трения) берётся пропорциональной нормальной силе: $F = \mu N$, где μ — коэффициент статического трения «линейка–гречка». Следовательно, не забывая, что у линейки две стороны, получаем:

$$F(h) = \mu \rho g w h^2.$$

На практике при $h \leq h_{\text{crit}}$ (где h_{crit} — условная «предельная глубина», за которой гречка начинает распределять давление преимущественно на стенки) эта формула описывает квадратичный рост силы трения с глубиной. Именно эта сила (за вычетом веса самой линейки) необходима для того, чтобы достать линейку из цилиндра с гречкой.

2. Глубина больше h_{crit} (далее теор. часть только 10го класса).

Когда h становится больше некоторой критической величины h_{crit} , давление достигает своего «предельного» значения уже на глубине h_{crit} и дальше не растёт. График давления превращается в линейную зависимость выходящую на некоторую константу.

Тогда итоговое (среднее) давление по всей глубине уже не растёт квадратично, и сила трения перестаёт возрастать как h^2 . Окончательно для $h \geq h_{\text{crit}}$ (в простейшем случае) получаем:

$$F(h) = \mu \rho g w \left(h_{\text{crit}}^2 + h_{\text{crit}} (h - h_{\text{crit}}) \right).$$

Это означает, что на участке от 0 до h_{crit} давление растёт линейно (давая квадратичный вклад в силу), а с h_{crit} до h оно остаётся постоянным (линейный вклад).

3. Наклон линейки.

Если линейка погружена под углом θ к вертикали, эффективная «глубина» каждой точки будет меньше. Можно показать аналогично — давление растёт от 0 до $\rho g L \cos \theta$ вдоль длины L (если L — длина погружённой части).

$$F(h) = \mu \rho g w L^2 \cos \theta = \mu \rho g w h^2 / \cos \theta.$$

Аналогично заменяется и h_{crit} . Правильным решением будет как зависимость F от длины погруженной части, так и от высоты погружения.

II. Эксперимент

- 1) Для измерения насыпной плотности гречки взвешиваем цилиндр, засыпаем в него гречку, измеряем её объём по делениям цилиндра. Далее вычисляем:
 $\rho = \frac{m_{\text{гр}}}{V_{\text{гр}}} = 820 \pm 10 \text{ кг/м}^3.$



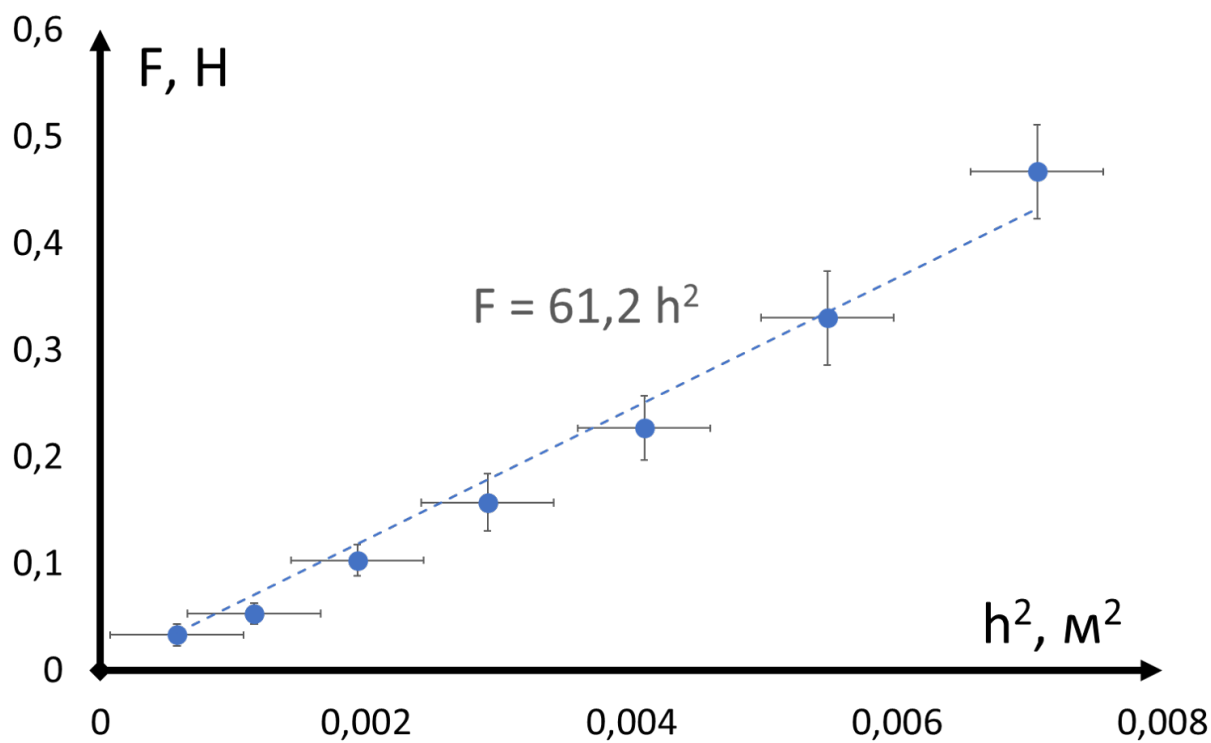
2) Для снятия зависимости силы трения от глубины:

- Погружаем линейку на разную глубину h .
- Вытаскиваем её медленно и фиксируем силу F по показаниям динамометра (к линейке его можно присоединить скотчем). Для одной высоты необходимо сделать усреднение по трём и более измерениям (значения могут колебаться). Также необходимо вычесть показания динамометра для веса линейки в каждом измерении.
- Повторяем для нескольких значений h .

Результаты сводим в таблицу $\{(h_i, F_i)\}$.

3) **Анализ и линеаризация.**

- Для малых h проверяем квадратичную модель, строя график F от h^2 . Если точки ложатся почти на прямую — значит $F \propto h^2$.
- При больших h может появиться отклонение от квадратичного роста, что укажет на эффект уплотнения (достижение h_{crit}). Однако, такой высоты в эксперименте вы не достигнете.



При учете погрешностей по силе учитывалось отклонение от среднего, по горизонтали - погрешность линейки. Оценка погрешности не обязательна.

4) Зная ширину линейки w и плотность гречки, находим коэффициент статического трения линейки о гречку из углового коэффициента прямой при линеаризации $\mu = \frac{61,2}{820 \cdot 9,81 \cdot 0,022} = 0,35 \pm 0,05$.

Измерение ёмкости и утечки электролитического конденсатора. 10 класс.

I. Теория

1. Формула разряда конденсатора через резистор (11 класс)

При разряде конденсатора через резистор R напряжение на конденсаторе $U(t)$ равно напряжению на резисторе. Тогда

$$i(t) = \frac{U(t)}{R},$$

но через конденсатор ток определяется как:

$$i(t) = C \frac{dU}{dt}.$$

С учётом убывания напряжения получаем

$$C \frac{dU}{dt} = -\frac{U(t)}{R}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

где $U_0 = U(0)$ — начальное напряжение конденсатора.

Величина $\tau = RC$ называется *константой времени* или *временной постоянной* цепи.

Оставшаяся энергия в конденсаторе через время $\tau = RC$ (10 класс)

Пусть конденсатор изначально заряжен до напряжения U_0 . Его начальная энергия:

$$E_0 = \frac{1}{2} C U_0^2.$$

При разряде через резистор R по закону

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

через время $\tau = RC$ напряжение становится

$$U(\tau) = U_0 e^{-1} = \frac{U_0}{e}.$$

Тогда энергия в тот же момент:

$$E(\tau) = \frac{1}{2} C (U(\tau))^2 = \frac{1}{2} C \frac{U_0^2}{e^2} = E_0 \cdot \frac{1}{e^2}.$$

Численно $\frac{1}{e^2} \approx 0.135$. То есть это примерно 13.5% от первоначальной энергии конденсатора.

2. Определение ёмкости C

Из того же закона следует, что если записать напряжение $U(t)$ в моменты времени t и построить график $\ln\left(\frac{U(t)}{U_0}\right)$ от t , получится прямая с наклоном $-\frac{1}{RC}$. Таким образом, измеряя время t за которое напряжение падает, например, до U_0/e (или любым другим способом, используемым в эксперименте), мы можем вычислить $\tau = RC$ и тем самым найти $C = \frac{\tau}{R}$.

3. Сопротивление утечки при малом обратном напряжении

Если электролитический конденсатор подключить «наоборот» (при низком напряжении, порядка 1 В), то через него может протекать небольшой утечный ток. В стационарном режиме, когда ток и напряжение устоялись, можно говорить о некотором сопротивлении $R_{\text{ут}}$. Если при подключённой батарееке $U_b \approx 1,2$ В мы наблюдаем через мультиметр устоявшееся напряжение U_C на конденсаторе, то по простому закону Ома можно приблизительно оценить $R_{\text{ут}}$.

$$I = \frac{U_b - U_C}{R_{\text{внешн}}} \quad \text{и} \quad I = \frac{U_C}{R_{\text{ут}}}.$$

Отсюда, зная U_C , U_b и $R_{\text{внешн}}$, можно вычислить R .

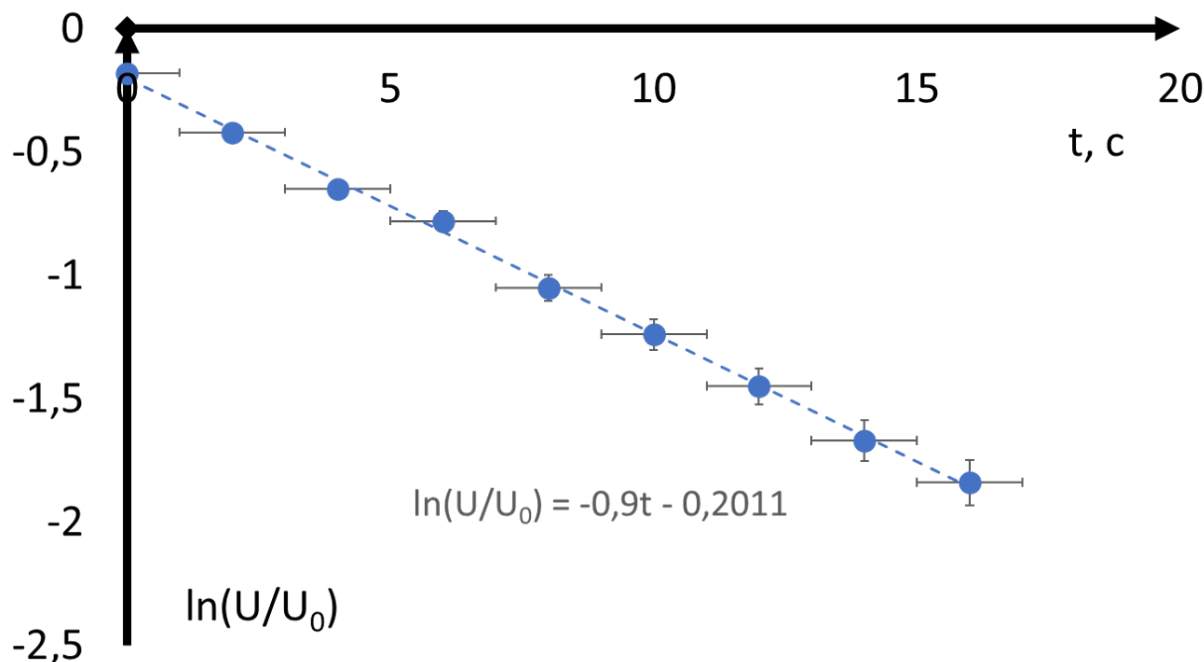
II. Эксперимент

1) Определение ёмкости конденсатора в прямом подключении.

- 1) Зарядим конденсатор от батарейки, зафиксировав напряжение U_0 .
- 2) Отключим источник и замкнём конденсатор на резистор R — так, чтобы он разряжался через этот резистор.
- 3) Одновременно запустим секундомер и следите за падением напряжения $U(t)$ (используем мультиметр).
- 4) Зафиксируем время, когда напряжение упадёт, например, до $U_0/e \approx 0.37 U_0$. Это время есть $\tau = RC \approx 10$ с.
- 5) Измерим R мультиметром, получим 1 МОм. Тогда $C = \frac{\tau}{R} \approx 10$ мкФ.
- 6) Для большей точности можно измерить несколько точек $(t_i, U(t_i))$ и построить график $\ln\left(\frac{U(t)}{U_0}\right)$ от t . Угловой коэффициент прямой будет $-\frac{1}{RC}$. Оба варианта решения оцениваются баллами.

2) Определение ёмкости при обратном подключении.

- 1) Повторим аналогичную процедуру разряда через тот же резистор.
- 2) Сравним полученную временную постоянную τ' и тем самым $C_{\text{back}} = \frac{\tau'}{R}$.
- 3) Типично для электролитических конденсаторов в обратном включении эффективная ёмкость может оказаться меньше (на проверенных конденсаторах отличие до 5%).



3) Измерение сопротивления утечки при малом обратном напряжении.

- 1) Подключим конденсатор в обратной полярности к батарейке.
- 2) Дождёмся, когда напряжение на клеммах конденсатора U_C стабилизируется.
- 3) Определим ток утечки I :

$$I = \frac{U - U_C}{R_{\text{доп}}}.$$

- 4) Определим её сопротивление:

$$R = \frac{U_C}{I} \approx 10 \text{ МОм}.$$

4) Учет сопротивления мультиметра.

- При измерении напряжения мультиметр имеет конечное входное сопротивление, обычно порядка 1 – 10 МОм.
- Если резистор R или утечка $R_{\text{ут}}$ оказываются в таком же диапазоне (мегаомы), то надо внести поправку на параллельное включение $R_{\text{ут}}$ и $R_{\text{м}} \approx 10 \text{ МОм}$.
- Аналогично, при измерениях тока через мультиметр, его внутренняя схема добавляет сопротивление шунта.

Допускается указать какие погрешности измерений у вас при этом возникали или учесть параллельное сопротивление мультиметра в ходе.

	Измерение ёмкости и утечки электролитического конденсатора – 10 класс	Балл
K1	Верно оценена энергия оставшаяся в конденсаторе ($1/e^2$) (1 - если правильно записана энергия запасённая конденсатором)	3
K2	Пояснено, как найти электроёмкость ($C = t/R$)	1
K3	Описан метод нахождения сопротивления утечки	1
K4	Описан метод нахождения напряжения от времени	1
K5	Измерены хотя-бы 2 напряжения в разные моменты времени	2
K6	Получена электроёмкость 1-30 мкФ (из графика по не менее чем 5 точкам - 3, усреднением - 2, по 1 точке - 1)	3
K7	Измерено правильным образом сопротивление утечки	2
K8	Верно оценено влияние сопротивления мультиметра (или оценена погрешность)	2

	Сыпучее трение 2.0 – 10 класс	Балл
K1	Предложена идея о среднем давлении	1
K2	Выведена суммарная сила реакции опоры, действующая на поверхность линейки (2 балла только за $h < h_{кр}$, 1 балл за $P \cdot S$)	3
K3	Верно записана итоговая формула для силы $F(h)$	1
K4	Формула модифицирована для погружения под углом	1
K5	Определена насыпная плотность гречки	1
K6	Измерена зависимость силы трения, действующей на линейку, от высоты (0,5 за точку, максимум 3,5)	3,5
K7	Зависимость построена в линеаризованных координатах	2,5
K8	Из углового коэффициента графика измерен коэффициент трения (1 балл, если по усреднению, 0, если по одной точке)	2