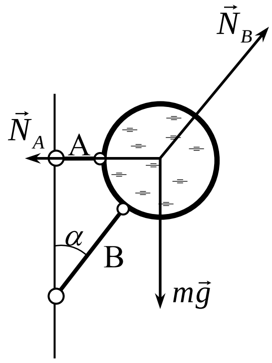
Решения и критерии оценивания работ заключительного тура Инженерной олимпиады школьников
10 класс, 2022-2023 учебный год



1. Поскольку стержни прикреплены к стене и трубе шарнирно, они могут оказывать силы, направленные только вдоль них самих. Поэтому силы действуют на трубу так, как это показано на рисунке (силы реакции стержней обозначены как N_A и N_B). Проецируя условие равновесия трубы

$$m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{N}_B = 0$$

на вертикальную и горизонтальную оси, получим

$$N_A = mg\ \mathrm{tg}\alpha,\ N_B = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

А поскольку на каждую пару стержней приходится часть трубы длиной l, массу воды в этой части трубы можно найти как

$$m = \frac{1}{4}\rho\pi d^2 l$$

Поэтому находим

$$N_A = mg\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{12}\rho\pi d^2 lg,\ N_B = \frac{\rho\pi d^2 lg}{4\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{6}\rho\pi d^2 lg.$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):
1. Правильная идея решения – использование условий равновесия трубы – 1 балл
2. Правильная расстановка сил, действующих на трубу – 1 балл
3. Правильно найдены силы реакции стержней - 1 балла
4. Правильный ответ для силы реакции стержня А – 1 балл
5. Правильный ответ для силы реакции стержня В – 1 балл
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

2. Пусть на станцию за малый интервал времени Δt из магистрального водопровода поступает масса воды $\Delta\mu$; такое же количество нагретой воды уходит со станции, поскольку вода не накапливается и не теряется на станции. За это время нагреватель выделяет количество теплоты

$$\Delta Q = P\Delta t$$

(P - мощность нагревателей). Это тепло расходуется на нагревание воды, поступающей на станцию из магистрального водопровода, и воды, которая вернулась в поток после отдачи тепла самой станции. Поэтому если в систему нагрева станции за интервал времени Δt уходила масса воды Δm, то мимо нагревателя за время Δt проходила масса воды $\Delta\mu + \Delta m$, причем Δm составляет (в первом случае) десятую часть всего потока, проходящего мимо нагревателя, т.е.

$$\Delta m = \frac{1}{10}(\Delta\mu + \Delta m) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta m = \frac{1}{9}\Delta\mu$$

Следовательно, уравнение теплового баланса в первом случае дает

$$c\frac{10}{9}\Delta\mu\Delta T = P\Delta t$$

Во втором случае для отопления самой станции используется восьмая часть потока, нагреваемого нагревателем, поэтому уравнение теплового баланса дает

$$c\frac{8}{7}\Delta\mu\Delta T_1 = P\Delta t$$

Деля эти формулы друг на друга, получим

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_1} = \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{7} = \frac{36}{35}$$

Отсюда

$$\Delta T_1 = \frac{35}{36}\Delta T = 0,97\Delta T$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):
1. Знание формулы для количества выделенной теплоты - 1 балл
2. Правильное распределение потоков воды на станции – 1 балл
3. Правильное уравнение теплового баланса в первом случае (когда для отопления станции используется десятая часть потока воды, нагреваемой нагревателем) – 1 балл
4. Правильное уравнение теплового баланса во втором случае (когда для отопления станции используется восьмая часть потока воды, нагреваемой нагревателем) – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

3. Поскольку сопротивление проволоки обратно пропорционально площади ее поперечного сечения, сопротивления R_1 тонкой и R_2 толстой проволок одинаковой длины относятся как

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 6,25$$

Это значит, что при параллельном соединении тонкой и толстой проволок одинаковой длины ток в тонкой проволоке будет в 6,25 раз меньше, чем в толстой. А поскольку предельные токи в проволоках отличаются в $I_2 / I_1 = 2,8$ раза, то при увеличении тока в цепи первой перегорит толстая проволока в тот момент, когда сила тока в ней достигнет значения $I_2 = 5$ А. В этот момент во второй проволоке будет протекать ток

$$\frac{d_1^2}{d_2^2}I_2 = 0,8 \text{ А},$$

а ток в цепи достигнет значения

$$I_3 = I_2 + \frac{I_2 d_1^2}{d_2^2} = \frac{d_1^2 + d_2^2}{d_2^2}I_2 = 5,8 \text{ А}.$$

После перегорания толстой проволоки весь этот ток потечет через тонкую проволоку (при условии, что ток в цепи не изменится, поскольку сопротивление предохранителя много меньше сопротивления остальной цепи), которая тоже перегорит.

Если соединить параллельно десять тонких проволок и одну толстую, то первой по-прежнему перегорит толстая проволока, когда ток через нее достигнет значения $I_2 = 5$ А. В этот момент ток через каждую тонкую проволоку будет равен $d_1^2 I_2 / d_2^2 = 0{,}8$. После перегорания он увеличится на 0,5 А в каждой проволоке, т.е. достигнет значения 1,3 А. Но тонкие проволоки не перегорят. Поэтому таким предохранителем цепь будет разрываться, при токе в ней

$$I_4 = 10 I_1 = 18 \text{ А}.$$

Таким образом, предохранитель, составленный из соединенных параллельно одной толстой и одной тонкой проволок одинаковой длины, разрывает цепь при силе тока в ней

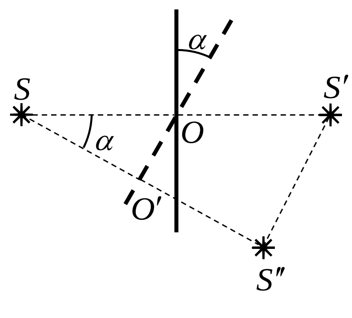
$$I_3 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{d_2^2} I_2 = 5{,}8 \text{ А},$$

а предохранитель, составленный из соединенных параллельно десяти тонких и одной толстой проволок разрывает цепь при силе тока в ней

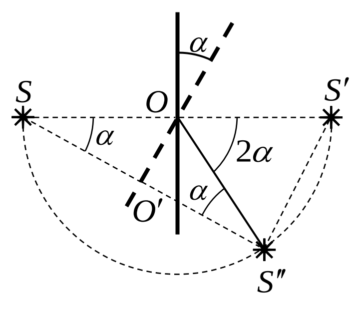
$$I_4 = 10 I_1 = 18 \text{ А}.$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):
1. Правильно найдено отношение сопротивлений проволок - 1 балл
2. Правильно найдено отношение токов, текущих через предохранители при параллельном соединении проволок – 1 балл
3. Определено, что при параллельном соединении тонкой и толстой проволок одинаковых длин первой перегорит толстая проволока, и сразу же тонкая, т.е. предохранитель рассчитан на максимальный ток в толстой проволоке – 1 балл
4. Определено, что в предохранителе, составленном из одной толстой и десяти тонких проволок после перегорания толстой проволоки тонкие перегорать не будут – 1 балл
5. Правильно найден максимальный ток для предохранителя, составленного из одной толстой и десяти тонких проволок – 1 балл
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

4. Определим характер движения изображения. Построение старого (S') и нового (S''; после поворота зеркала на угол α) изображения источника выполнено на рисунке. Очевидно угол $SS''S'$ - прямой. Действительно, треугольники $SO'O$ и $SS''S'$ подобны, так как у них общий угол α, а стороны, примыкающие к этому углу пропорциональны с коэффициентом подобия 2 (поскольку расстояние от источника до изображения вдвое больше расстояния от источника до зеркала):



$$\frac{SS'}{SO} = \frac{SS''}{SO'} = 2$$



А поскольку угол $SO'O$ - прямой (изображение источника лежит на продолжении перпендикуляра, опущенного из источника на зеркало), то прямым является и угол $SS''S'$. Причем независимо от угла поворота зеркала. Это значит, что изображение источника движется по такой кривой, что угол $SS''S'$ все время остается прямым. Отсюда следует, что изображение источника движется по окружности, для которой отрезок SS' является диаметром. А потому радиус этой окружности равен расстоянию от источника до оси вращения зеркала, т.е. $R = SO = d$. Эта окружность показана на рисунке справа.

Найдем теперь угловую скорость вращения изображения. Пусть зеркало повернулось на угол α. Тогда (поскольку траектория движения изображения – окружность) $OS = OS''$ и $\angle OSS'' = \angle OS''S = \alpha$ (эти углы отмечены на рисунке). Поэтому $\angle S'OS'' = 2\alpha$, и, следовательно, изображение вращается с постоянной угловой скоростью ω', которая вдвое больше угловой скорости зеркала

$$\omega' = 2\omega$$

Поэтому скорость изображения источника постоянна (т.к. не зависит от угла поворота зеркала α) и равна

$$v = \omega' R = 2\omega R = 2\omega d = 1 \text{ м/с}.$$

Поскольку изображение движется по окружности с постоянной по величине скоростью, его ускорение – центростремительное. Оно равно

$$a = \omega'^2 R = 4\omega^2 R = 4\omega^2 d = 2 \text{ м/с}^2.$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):
1. Правильное построение изображения точечного источника в зеркале – 1 балл
2. Доказательство, что изображение движется по окружности - 1 балл
3. Правильное нахождение угловой скорости изображения – 1 балл
4. Правильная формула для центростремительного ускорения – 1 балл
5. Правильный ответ для ускорения изображения – 1 балла
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

5. Пусть сопротивление линии r, сопротивление потребителя в первом случае - R_1, напряжение на входе линии в первом случае - U_1. Тогда ток в линии определяется законом Ома для участка цепи

$$I_1 = \frac{U_1}{r + R_1},$$

а мощность потерь P_0, мощность, передаваемая потребителю $P_{потр}$, и отношение мощности потерь в линии к мощности, передаваемой потребителю, η_1 составляют

$$P_0 = \left(\frac{U_1}{r + R_1}\right)^2 r, \; P_{потр} = \left(\frac{U_1}{r + R_1}\right)^2 R_1, \; \eta_1 = \frac{P_0}{P_{потр}} = \frac{r}{R_1} \qquad (*)$$

Из третьей формулы (*) следует, что чтобы понизить долю потерь, необходимо увеличить сопротивление потребителя по сравнению с сопротивлением линии. Но если сделать только это, то будет уменьшаться и мощность, передаваемая потребителю (см. вторую формулу (*)). Поэтому чтобы не изменилась мощность, передаваемая потребителю, нужно увеличить напряжение на входе линии. Найдем, какое напряжение нужно подать для уменьшения потерь до 1 %.

Итак, пусть новое напряжение на входе линии - U_2, сопротивление потребителя - R_2. Имеем

$$\left(\frac{U_1}{r+R_1}\right)^2 R_1 = \left(\frac{U_2}{r+R_2}\right)^2 R_2$$

Но поскольку сопротивление линии в η раз меньше сопротивления потребителя, получаем

$$\frac{U_1^2\eta_1}{(1+\eta_1)^2 r} = \frac{U_2^2\eta_2}{(1+\eta_2)^2 r}$$

Отсюда находим

$$\frac{U_2}{U_1} = \sqrt{\frac{\eta_1(1+\eta_2)^2}{\eta_2(1+\eta_1)^2}} = \frac{1+\eta_2}{1+\eta_1}\sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}} = 2{,}15 \qquad (**)$$

Поскольку множитель перед квадратным корнем в формуле (**) близок к единице (в нашем случае – 0,96), обычно считают, что для уменьшения потерь в n раз нужно повысить напряжение в линии в $\sqrt{n}$ раз (в нашем случае это в 2,24 раза). И, конечно, в n раз нужно увеличить сопротивление потребителя.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):
1. Правильная идея решения – при увеличении напряжения на входе линии и сопротивления потребителя убывает доля потерь в передающих проводах – 1 балл
2. Правильное использование законов Ома и Джоуля-Ленца – 1 балл
3. Правильно найдена мощность, передаваемая потребителю - 1 балл
4. Правильно найдено, как нужно изменить сопротивление потребителя для уменьшения потерь до 1 % - 1 балл
5. Правильно найдено отношение напряжений на входе линии для уменьшения доли потерь до 1 % – 1 балл
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Чтобы колесо смогло переехать бревно, должны быть выполнены следующие условия: при контакте с колесом бревно не должно вращаться и не должно скользить по дороге. При выполнении этих условий сила трения $\vec{F}_{тр}$ и сила реакции $\vec{N}$, действующие на колесо в точке контакта с бревном (и которые можно увеличивать, нажимая на педаль «газа» автомобиля) поднимут колесо, и вместе с силой $\vec{F}$, действующей на колесо со стороны автомобиля, заставят «перевалить» через бревно. На рисунке 1 показаны силы, действующие на колесо со стороны бревна и автомобиля.

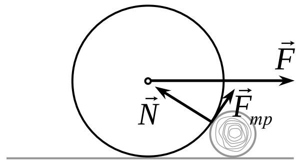


Рис.1 Силы, действующие на колесо

Исследуем выполнимость этих условий. На бревно действуют: силы реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{тр}$ со стороны колеса и силы реакции $\vec{N}_1$ и трения $\vec{F}_{тр,1}$ со стороны земли (см. рисунок 2). Поскольку силы реакции проходят через центр бревна, то из уравнения моментов относительно центра заключаем, что

$$F_{тр} = F_{тр,1} \qquad (1)$$

а из уравнения сил (в проекциях на горизонтальное направление)

$$N\cos\alpha - F_{тр}\sin\alpha = F_{тр,1} \qquad (2)$$

где α - угол между силой реакции и поверхностью земли (см. рисунок 2). Отсюда находим

$$F_{тр} = F_{тр,1} = \frac{N\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$

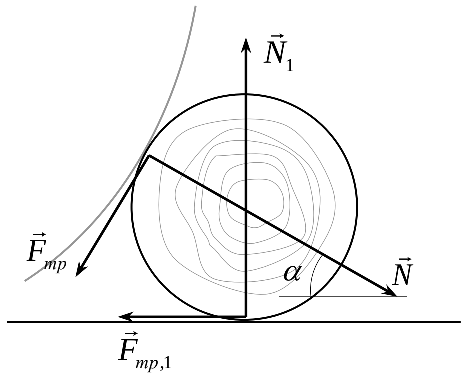


Рис.2 Силы, действующие на бревно

И уравнения для сил в проекциях на вертикальное направление найдем

$$N_1 = N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha = N\sin\alpha + \frac{N\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = N$$

Таким образом, оба условия проскальзывания – между колесом и бревном $F_{тр} \le \mu N$ и между бревном и дорогой $F_{тр,1} \le \mu N_1$ – будут нарушаться одновременно. Эти условия дают

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} \le \mu$$

Учитывая, что

$$\sin\alpha = \frac{R-r}{R+r}, \; \cos\alpha = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r},$$

получим условие переезда колеса через бревно

$$\mu \ge \sqrt{\frac{r}{R}}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):
1. Правильная идея решения – колесо переезжает бревно благодаря силе трения между бревном и колесом – 1 балл
2. Доказано, что силы трения между колесом и бревном и между бревном и поверхностью одинаковы – 1 балл
3. Правильно использована формула для максимальной силы трения покоя - 1 балл
4. Доказано, что условия непроскальзывания между колесом и бревном и бревном и поверхностью будут нарушаться одновременно - 1 балл
5. Правильный ответ для минимального коэффициента трения, при котором колесо может переехать бревно – 1 балл
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.