Решения и критерии оценки работ очного отборочного тура
Инженерной олимпиады школьников
10 класс, 2022-2023 учебный год

1. Из данных условия находим среднюю плотность загрязненной жидкости

$$\rho_{ср} = \frac{m}{V}$$

С другой стороны, среднюю плотность смеси можно найти через плотности компонент. Пусть масса воды в загрязненной жидкости m_1, масса нефти - m_2. Тогда для средней плотности имеем

$$\rho_{ср} = \frac{m}{\dfrac{m_в}{\rho_в} + \dfrac{m_н}{\rho_н}}$$

где $m_в$ и $m_н$ - массы воды и нефти в смеси. Поскольку $m = m_в + m_н$, эту формулу можно продолжить так

$$\rho_{ср} = \frac{m}{\dfrac{m - m_н}{\rho_в} + \dfrac{m_н}{\rho_н}}$$

Поэтому

$$\frac{m - m_н}{\rho_в} + \frac{m_н}{\rho_н} = V$$

Отсюда находим

$$m_н = \frac{(V\rho_в - m)\rho_н}{\rho_в - \rho_н} = 1100 \text{ кг}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильное использование формулы, связывающей массу, плотность и объем - 0,5 балла.
2. Правильное использование средней плотности – 0,5 балла.
3. Правильное уравнение, из которого можно найти массу нефти в загрязненной жидкости – 0,5 балла
4. Правильный ответ – и формула и число – 0,5 балла.

2. Оба положения модели корабля, данные в условии, являются положениями равновесия – это значит, что сумма сил и сумма моментов сил, действующих на модели равна нулю. Поэтому в этом положении потенциальная энергия модели в поле силы тяжести достигает или максимума или минимума среди всех соседних положений. Однако в положении устойчивого равновесия этот экстремум потенциальной энергии должен быть минимумом. Найдем, какое из двух положений, данных в условии, отвечает минимуму потенциальной энергии.

Потенциальная энергия плавающего тела складывается из потенциальной энергии самого тела и потенциальной энергии воды, которая поднимается благодаря ее вытеснению телом. Потенциальная энергия тела в обоих случаях одинакова, поскольку его центр тяжести находится на уровне воды. Потенциальную энергию вытесненной воды можно посчитать так. До вытеснения – это потенциальная энергия воды в объеме погруженной в воду части тела, после вытеснения – это потенциальная энергия этой воды на поверхности воды в сосуде. Поэтому потенциальная энергия воды в объеме погруженной в воду части тела равна (относительно уровня воды в сосуде)

$$\Pi = mgh$$

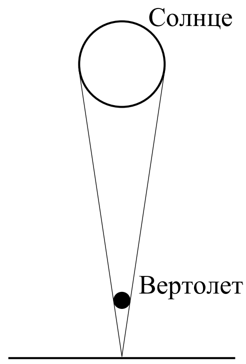
где m - масса вытесненной воды, g - ускорение свободного падения, h - расстояние от центра тяжести вытесненной воды до поверхности воды в сосуде. Масса вытесненной воды одинакова и для первой, и для второй модели, а вот расстояние от поверхности до центра тяжести – разное. В первом случае (случае а)) оно равно $h_{a)} = a/4 = 0,25a$ (где a - ребро поперечного сечения модели), во втором случае (в случае б)) – $h_{б)} = \sqrt{2}a/6 = 0,236a$ (эта формула связана с тем, что сечение погруженной части модели – треугольник, а его центр тяжести находится в точке пересечения медиан). Поскольку

$$h_{б)} < h_{a)}$$

потенциальная энергия плавающего тела в случае а) больше потенциальной энергии тела в случае б). А поскольку «между ними» нет других положений равновесия, то потенциальная энергия плавающего тела в положении а) достигает максимума, в положении б) – минимума. Поэтому положение а) – неустойчивое, положение б) – устойчивое равновесие.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – устойчивому положению равновесия отвечает минимум потенциальной энергии системы тело-вода - 0,5 балла.
2. Правильное нахождение потенциальной энергии поднятой воды – 0,5 балла.
3. Правильное сравнение центров тяжести вытесненной воды в первом и втором случае – 0,5 балла
4. Правильный вывод об устойчивости положения кубика на рисунке (б) – 0,5 балла.

3. Будем для оценки считать, что вертолет имеет форму шара. Очевидно, вертолет перестает отбрасывать тень на землю, когда его угловой размер становится равным угловому размеру Солнца (см. рисунок). В этом положении тень от вертолета становится точкой. При большей высоте подъема лучи, идущие от разных точек солнечного диска, будут освещать всю землю под вертолетом, и вертолет не будет отбрасывать тень. Поэтому



$$\frac{d}{h} = \Delta\alpha \qquad \Rightarrow \qquad d = h\Delta\alpha$$

где d - размер вертолета, причем угол должен быть задан в радианах. Для угла, заданного в градусах, имеем для размера вертолета

$$r = \frac{\pi}{180}\Delta\alpha h \approx 9 \quad \text{м}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – тень вертолета на земле пропадает, когда его угловой размер становится равным угловому размеру Солнца – 0,5 балла.
2. Правильные формулы для размера вертолета через его угловой размер – 0,5 балла.

3. Правильный пересчет градусов в радианы или использование тригонометрических формул – 0,5 балла
4. Правильная оценка размера вертолета (с точностью до множителя 2) – 0,5 балла.

4. Сразу после остановки ленты детали имеют скорость $v = 2$ м/с относительно ленты, и будут останавливаться благодаря трению. В ящик свалятся те детали, тормозной путь которых больше, чем расстояние от них до ящика в момент остановки транспортера. Тормозной путь S тела, движущегося по шероховатой горизонтальной поверхности, можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mgS$$

где m - масса тела, v - его начальная скорость, μ - коэффициент трения между телом и поверхностью. Отсюда находим

$$S = \frac{v^2}{2\mu g}$$

Поэтому в ящик свалятся

$$N = \left[\frac{S}{d}\right] = \left[\frac{v^2}{2\mu gd}\right] = 12 \text{ деталей},$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – найти тормозной путь деталей и сравнить его с расстоянием между деталями – 0,5 балла.
2. Правильные формулы для тормозного пути – 0,5 балла.
3. Правильная формула для количества деталей, упавших в ящик – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла.

5. Чтобы удалить балласт (воду) из балластного резервуара, насос должен совершить работу против сил гидростатического давления и сообщить кинетическую энергию удаляемой воде, причем эта энергия может оказаться значительной, поскольку воду нужно удалять за достаточно короткое время. Поэтому работу насоса можно записать как

$$A = pV + \frac{mv^2}{2}$$

где p - давление жидкости на глубине h ($p = p_0 + \rho gh$), V - объем резервуара, m - масса воды в резервуаре ($m = \rho V$), v - ее скорость ($v = V / tS$). Поэтому работа насоса равна

$$A = \left(p_0 + \rho gh\right)V + \frac{\rho V^3}{2t^2 S^2}$$

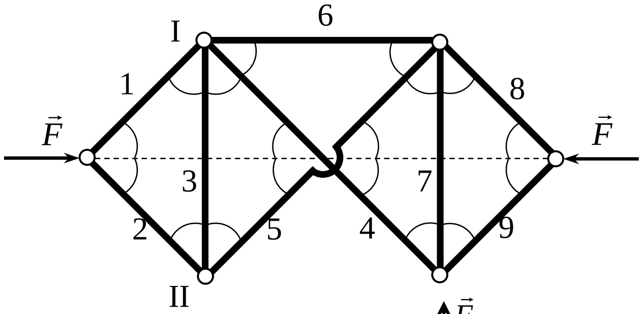
Отсюда находим мощность N, развиваемую насосом

$$N = \frac{A}{t} = \frac{\left(p_0 + \rho gh\right)V}{t} + \frac{\rho V^3}{2t^3 S^2} = 206 \text{ кВт}$$

Вклад второго слагаемого составляет около 10%.

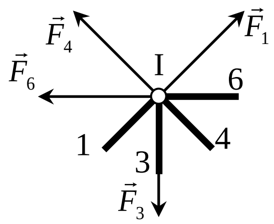
Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Правильная идея решения – вычисление работы, которую необходимо совершить для удаления воды из резервуара за данное время – 0,5 балла.
2. Правильное вычисление работы против сил гидростатического давления – 0,5 балла.
3. Правильное вычисление работы, которую нужно совершить для сообщения жидкости кинетической энергии – 0,5 балла
4. Правильный ответ для мощности насоса – 0,5 балла.

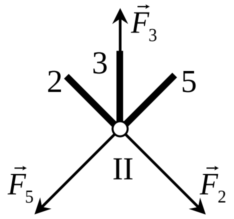
6. Докажем, что сила натяжения стержня 6 равна нулю. Действительно, пусть эта сила не равна нулю. Тогда условие равновесия узлов I и II (см. рисунок) дают



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_4 + \vec{F}_3 + \vec{F}_6 = 0 \qquad \text{для узла I}$$
$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_5 = 0 \qquad \text{для узла II}$$

(на рисунке принято определенные направления сил натяжения стержней; доказательство равенства нулю силы натяжения стержня 6 от этих направлений не зависит). Благодаря симметрии конструкции относительно «право-лево» силы натяжения стержней 4 и 5 одинаковы. Поэтому условия равновесия узлов I и II в проекциях на оси перпендикулярные стержням 1 и 2 соответственно будут одинаковы за исключением силы натяжения стержня 6, которая, таким образом, должна быть равна нулю

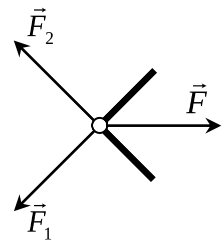




$$\vec{F}_6 = 0$$

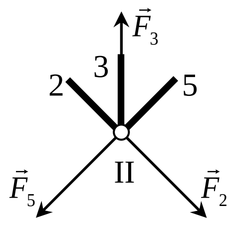
Это значит, что стержень 6 можно удалить из конструкции, а для нее справедливо и условие симметрии «верх-низ». То есть

$$F_1 = F_2 = F_8 = F_9; \qquad F_4 = F_5; \qquad F_3 = F_7$$



Теперь из условия равновесия самого левого узла (см. рисунок) заключаем, что стержни 1 и 2 (и, следовательно, 8 и 9) будут сжаты, а силы их натяжения равны

$$F_1 = F_2 = F_8 = F_9 = \frac{F}{2\cos 45^\circ} = \frac{F}{\sqrt{2}}$$



Поэтому из условия равновесия верхних или нижних узлов заключаем, что стержни 4 и 5 тоже будут сжаты, а стержни 3 и 7 растянуты. Поэтому из условия равновесия, например, узла II (см. рисунок)

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_5 = 0$$

в проекциях на горизонтальную ось получаем, что $F_2 = F_5$, и, следовательно,

$$F_4 = F_5 = \frac{F}{\sqrt{2}}.$$

А из условия равновесия в проекциях на вертикальную ось

$$F_3 = 2F_2 \cos 45°$$

находим

$$F_3 = F_7 = F$$

Итак:

стержни 1, 2, 4, 5, 8, 9 – сжаты, $F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = F_8 = F_9 = \frac{F}{\sqrt{2}}$

стержни 3 и 7 - растянуты, $F_3 = F_7 = F$

стержень 6 не нагружен, $F_6 = 0$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)
1. Доказательство равенства нулю силы натяжения стержня 6 – 0,5 балла.
2. Доказательство равенства сил натяжения стержней 1, 2, 4, 5, 8 и 9, а также сил натяжения стержней 3 и 7 – 0,5 балла.
3. Правильный ответ для сил натяжения 1, 2, 4, 5, 8 и 9 стержней – 0,5 балла
4. Правильный ответ для сил натяжения 3 и 7 стержней – 0,5 балла.

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.