

**Решения и критерии оценивания работ заключительного тура
Инженерной олимпиады школьников
11 класс, 2022-2023 учебный год**

Решения и критерии оценивания

1. Пусть массы первого и второго растворов равны соответственно m_1 и m_2 . Тогда количество соли в первом растворе $\eta_1 m_1$, во втором - $\eta_2 m_2$. Поэтому для концентрации этого раствора (которая по условию равна концентрации первого раствора η_1) после добавления в него массы m чистой воды получим

$$\frac{\eta_1 m_1 + \eta_2 m_2}{m_1 + m_2 + m} = \eta_1 \quad (*)$$

Если добавить в раствор массу соли $2m$, то масса соли в растворе станет равной $\eta_1 m_1 + \eta_2 m_2 + 2m$, а масса самого раствора $m_1 + m_2 + 2m$. Поэтому для концентрации этого раствора (которая по условию равна концентрации второго раствора η_2) имеем

$$\frac{\eta_1 m_1 + \eta_2 m_2 + 2m}{m_1 + m_2 + 2m} = \eta_2 \quad (**)$$

Из этих уравнений находим

$$m_1 = \frac{2m(1 - \eta_2)}{\eta_2 - \eta_1} = 7,5 \text{ кг}, \quad m_2 = \frac{m\eta_1}{\eta_2 - \eta_1} = 3,75 \text{ кг}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Использование правильного определения массовой концентрации раствора - 1 балл**
 - 2. Правильные формулы для массы соли в первом и втором растворах – 1 балл**
 - 3. Правильное уравнение для концентрации раствора после добавления соли – 1 балл**
 - 4. Правильный ответ для массы соли в первом растворе (формула и число) – 1 балл**
 - 5. Правильный ответ для массы соли во втором растворе (формула и число) – 1 балл**
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.**

2. Поскольку сопротивление проволоки обратно пропорционально площади ее поперечного сечения, сопротивления R_1 тонкой и R_2 толстой проволок одинаковой длины относятся как

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = 6,25$$

Это значит, что при параллельном соединении тонкой и толстой проволок одинаковой длины ток в тонкой проволоке будет в 6,25 раз меньше, чем в толстой. А поскольку предельные токи в проволоках отличаются в $I_2 / I_1 = 2,8$ раза, то при увеличении тока в цепи первой перегорит толстая проволока в тот момент, когда сила тока в ней достигнет значения $I_2 = 5$ А. В этот момент во второй проволоке будет протекать ток

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} I_2 = 0,8 \text{ А},$$

а ток в цепи достигнет значения

$$I_3 = I_2 + \frac{I_2 d_1^2}{d_2^2} = \frac{d_1^2 + d_2^2}{d_2^2} I_2 = 5,8 \text{ А.}$$

После перегорания толстой проволоки весь этот ток потечет через тонкую проволоку (при условии, что ток в цепи не изменится, поскольку сопротивление предохранителя много меньше сопротивления остальной цепи), которая тоже перегорит.

Если соединить параллельно десять тонких проволок и одну толстую, то первой по-прежнему перегорит толстая проволока, когда ток через нее достигнет значения $I_2 = 5 \text{ А}$. В этот момент ток через каждую тонкую проволоку будет равен $d_1^2 I_2 / d_2^2 = 0,8$. После перегорания он увеличится на $0,5 \text{ А}$ в каждой проволоке, т.е. достигнет значения $1,3 \text{ А}$. Но тонкие проволоки не перегорят. Поэтому таким предохранителем цепь будет разрываться, при токе в ней

$$I_4 = 10I_1 = 18 \text{ А.}$$

Таким образом, предохранитель, составленный из соединенных параллельно одной толстой и одной тонкой проволок одинаковой длины, разрывает цепь при силе тока в ней

$$I_3 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{d_2^2} I_2 = 5,8 \text{ А,}$$

а предохранитель, составленный из соединенных параллельно десяти тонких и одной толстой проволок разрывает цепь при силе тока в ней

$$I_4 = 10I_1 = 18 \text{ А.}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Правильно найдено отношение сопротивлений проволок - 1 балл**
- 2. Правильно найдено отношение токов, текущих через предохранители при параллельном соединении проволок – 1 балл**
- 3. Определено, что при параллельном соединении тонкой и толстой проволок одинаковых длин первой перегорит толстая проволока, и сразу же тонкая, т.е. предохранитель рассчитан на максимальный ток в толстой проволоке – 1 балл**
- 4. Определено, что в предохранителе, составленном из одной толстой и десяти тонких проволок после перегорания толстой проволоки тонкие перегорать не будут – 1 балл**
- 5. Правильно найден максимальный ток для предохранителя, составленного из одной толстой и десяти тонких проволок – 1 балл**

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

3. Поскольку никаких неупругих процессов не происходит, первоначальная механическая энергия тела может только распределиться между телом и мячиком, но не потеряться. С другой стороны, поскольку масса мячика много меньше массы тела, а его скорость в любом случае не может быть больше скорости тела (мячик находится ниже тела), он может взять на себя очень незначительную долю механической энергии системы. Это значит, что после столкновения тело будет иметь практически такую же механическую энергию, и, следовательно, подпрыгнет практически на ту же высоту h , с которой оно падало. Поэтому сразу после столкновения оно будет иметь практически такую же скорость

$$v = \sqrt{2gh},$$

какую оно набрало при падении. А это значит, что и верхние точки мячика сразу после того, как пропал контакт между ними и мячиком, будут иметь такую же скорость. При этом нижние точки мячика (которые в процессе столкновения находились на полу), вплоть до окончания столкновения имеют скорость пола – т.е. нулевую. Поэтому для оценки можно считать, что центр масс мячика сразу после столкновения имеет скорость $v/2$. Высоту подъема мячика из закона сохранения механической энергии для движения его центра масс

$$\frac{m(v/2)^2}{2} = mgh_1$$

где m - масса мячика, h_1 - высота, на которую он подпрыгнет. Отсюда находим

$$h_1 = \frac{v^2}{8g} = \frac{h}{4}$$

Таким образом, после столкновения с телом мячик подпрыгнет на четверть высоты, с которой падало тело.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Доказательство того, что массивное тело после столкновения с мячиком подпрыгнет на ту же высоту - 1 балл**
 - 2. Утверждение, что верхние точки мячика после столкновения будут иметь такую скорость, как и тело, нижние (контактирующие с землей) – нулевую – 1 балл**
 - 3. Утверждение, что центр масс мячика (в момент отрыва тела от мячика) будет иметь вдвое меньшую скорость, чем тело – 1 балл**
 - 4. Правильная связь начальной скорости и высоты подъема – 1 балл**
 - 5. Правильный ответ для высоты подъема мячика – 1 балл**
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.**

4. В процессе a-b внутренняя энергия газа увеличивалась без сообщения ему теплоты – поэтому процесс a-b адиабатическое сжатие. В процессе b-c не менялась внутренняя энергия газа – этот процесс изотермический с сообщением газу тепла, т.е. изотермическое расширение. Процесс c-d снова адиабатический, но с уменьшением внутренней энергии – адиабатическое расширение, процесс d-e изотермический с забором у газа тепла, т.е. изотермическое сжатие.

Из данного графика следует, что начальное состояние газа *a* и конечное состояние *e* лежат на одной изотерме, а вот чтобы проверить, совпадают ли они (и тогда этот процесс является циклом Карно), нужно найти работу газа за весь процесс a-b-c-d-e двумя способами: применяя первый закон термодинамики и используя известные соотношения для работы газа в цикле Карно. Если эти работы совпадут, данный процесс представляет собой цикл Карно.

Применяя первый закон термодинамики ко всему процессу, получаем

$$Q = \Delta U + A$$

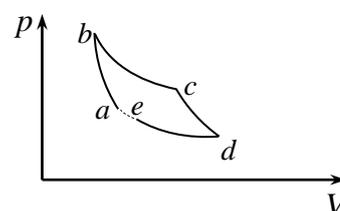
где Q - количество теплоты, сообщенное газу в процессе a-b-c-d-e, A - работа газа в этом процессе. Поскольку изменение внутренней энергии газа за весь процесс равно нулю, то $A = Q$. А так как с начала процесса газу сообщили количество теплоты $Q = 6$ кДж, то работа газа в процессе a-b-c-d-e равна этому значению

$$A_{a-b-c-d-e} = 6 \text{ кДж.} \quad (*)$$

С другой стороны, если рассматриваемый процесс замкнутый, он является циклом Карно и работа газа в течение всего процесса есть

$$A_{\text{Карно}} = \eta Q_n = \frac{T_n - T_x}{T_n} Q_n = 0,5 Q_n$$

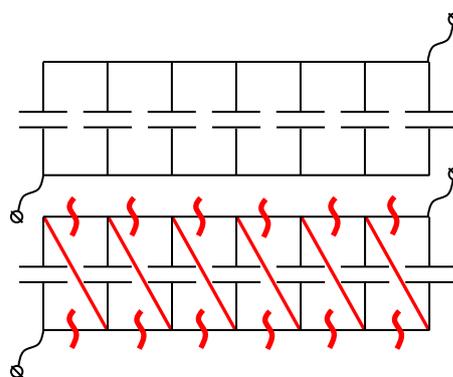
где η - КПД цикла Карно, Q_n - количество теплоты, полученное газом от нагревателя в течение цикла, T_n и T_x - температуры нагревателя и холодильника. В нашем случае $Q_n = 10$ кДж (как это следует из данного графика), $\eta = 0,5$. Поэтому $A_{a-b-c-d-e} > A_{\text{Карно}}$, и следовательно, данный процесс является незамкнутым. Если бы в процессе d-e над газом была бы совершена бóльшая работа, и график процесса d-e дошел бы до значения 5 кДж, процесс был бы замкнутым. Следовательно, нижняя изотерма не доходит до начального состояния (см. рисунок).



Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идентификация процессов a-b и c-d как адиабатических - 1 балл
 2. Правильная идентификация процессов b-c и d-a как изотермических – 1 балл
 3. Правильная идея дальнейшего анализа процесса – сравнение работ газа во всем процессе, вычисленных по первому началу термодинамики, и через КПД цикла Карно – 1 балл
 4. Правильное значение КПД цикла Карно – 1 балл
 5. Правильное вычисление работ, вывод о незамкнутости данного процесса и правильный график процесса в координатах «давление-объем» - 1 балл
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

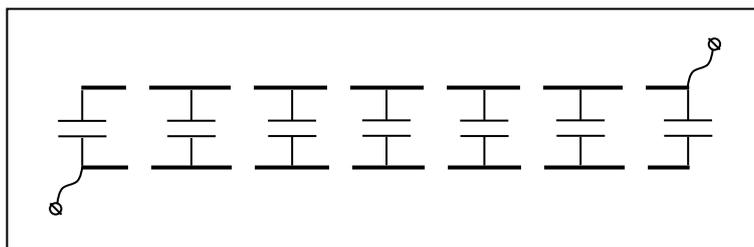
5. Основную идею работы такого устройства можно разглядеть, просто внимательно посмотрев на параллельно соединенные конденсаторы (см. верхний рисунок; вместо 2023 конденсаторов нарисовано семь). Если одновременно разорвать все проводники, соединяющие конденсаторы, одновременно поменяв соединение двух соседних конденсаторов для правильной полярности соединения (см. второй сверху рисунок; нужные изменения цепи показаны красным), то конденсаторы окажутся соединенными последовательно с теми же самыми зарядами, которые были у параллельно соединенных конденсаторов. Таким образом, для превращения соединения конденсаторов из последовательного в параллельное нужно предложить устройство, которое одновременно разрывает много проводов, расположенных достаточно далеко



один. Такое устройство можно использовать для преобразования параллельного соединения конденсаторов в последовательное.

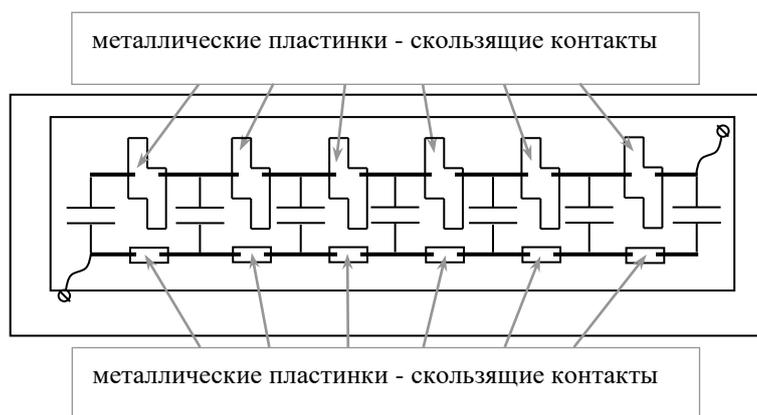
друг от друга, и меняет соединение ряда проводов. Такое устройство можно сконструировать, используя скользящие контакты.

Возьмем две параллельно расположенных металлических шины (толстых прямых провода), прикрепим их параллельно друг другу к диэлектрической пластинке (например, деревянной) и сделаем в них напротив друг друга

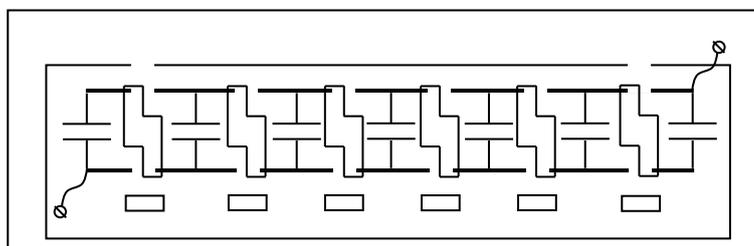


2022 одинаковых разреза - по числу промежутков между 2023 параллельными конденсаторами. К каждой паре расположенных напротив друг друга кусков шин припаиваем конденсатор (см. рисунок). Также соединим крайние участки верхней и нижней шин с клеммами источника. Теперь необходимо предложить выключатель, который может либо замкнуть концы разрыва в одной и той же шине, либо замкнуть их в «шахматном порядке»: верхний-нижний-верхний-нижний и т.д.

Используем скользящие контакты. Поместим между шинами и подставкой тонкую диэлектрическую пластинку с приклеенными к ней металлическими пластинками, которые представляют собой скользящие контакты определенной формы. Эти контакты замыкают разрезы в шинах и имеют такую форму, как показано на рисунке: нижние в форме прямоугольников, верхние – в форме «зигзага». Причем пластинка со скользящими контактами может двигаться относительно шин с конденсаторами. Очевидно, в положении, показанном на рисунке справа, скользящие контакты замыкают все разрезы в шинах, и, следовательно, конденсаторы в таком случае соединены параллельно.



Сдвинем теперь пластинку со скользящими контактами к одной из шин (вниз на рисунке). Тогда благодаря «зигзагообразному» расположению скользящих контактов они станут замыкать



каждый правый контакт верхней шины с каждым левым контактом нижней. В результате в положении, показанном на рисунке справа, конденсаторы соединены уже последовательно с сохранением первоначального заряда на каждом конденсаторе.

Очевидно, что напряжение U на батарее конденсаторов при переключении предложенного устройства (которое в электротехнике называют коммутатором – переключателем) увеличится в

2023 раза по сравнению с напряжением источника ε . Действительно, при соединении с источником параллельных конденсаторов на всех будут напряжения источника $u = \varepsilon$, которые после отключения источника и переключения коммутатора будут складываться: $U = 2023\varepsilon$. А вот энергия батареи, конечно, не изменится, поскольку при переключении коммутатора не совершается работы. Действительно, энергию батареи можно посчитать как энергию одного конденсатора с эквивалентной емкостью, подключенного к источнику. До переключения конденсаторы соединены параллельно, эквивалентная емкость C батареи есть сумма емкостей отдельных конденсаторов c : $C_{\text{пар}} = 2023c$. Напряжение на батарее – напряжение источника, поэтому энергия батареи

$$W_{\text{нач}} = \frac{2023c\varepsilon^2}{2}$$

После переключения коммутатора конденсаторы соединены последовательно, их эквивалентная емкость

$$C_{\text{посл}} = \frac{c}{2023}$$

и на батарее не изменился заряд $q = c\varepsilon$, поскольку она отключена от источника. Поэтому энергия батареи может быть найдена как

$$W_{\text{кон}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{2023c\varepsilon^2}{2}$$

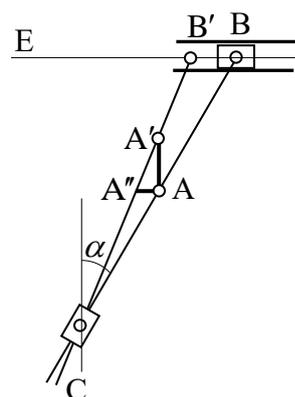
В заключение отметим, что описанную выше конструкцию придумал в середине 19 века известный французский инженер Гастон Планте (изобретатель свинцово-кислотного аккумулятора, который используется во всех автомобилях) для получения высоких напряжений.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея работы переключателя – одновременный разрыв ряда проводов в параллельном соединении конденсаторов (первый рисунок в решении) - 1 балл
2. Предложение использовать скользящие контакты – 1 балл
3. Конструктивная схема переключателя – разрывы в проводах, которые замыкаются или размыкаются скользящими контактами – 1 балл
4. Правильное расположение скользящих контактов и принципиальная схема переключателя – 1 балл
5. Правильное вычисление напряжения на батарее и ее энергии после переключения соединения – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Пусть после положения, показанного на рисунке в условии задачи, прошел малый интервал времени Δt . Найдем новое положение точки В (B') и соответственно ее перемещение BB' (см. рисунок). Поскольку поворотная втулка А связана с кривошипом, а он в начальном положении параллелен направляющим EB, то перемещение поворотной втулки практически перпендикулярно отрезку EB и равно $AA' = l\omega\Delta t$. Поэтому перемещение AA'' середины кулисы BC (которое будет практически параллельно отрезку EB,



так как кулиса будет перемещаться в поворотной втулке А) можно найти как

$$AA'' = AA' \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}AA'}{3}$$

где, как это следует из данных условия $\alpha = 30^\circ$. Перемещение ползуна В будет удвоенным по отношению к перемещению середины кулисы, поэтому

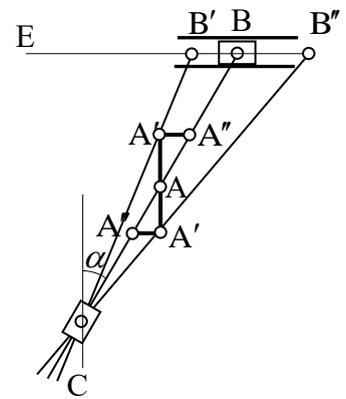
$$BB' = \frac{2\sqrt{3}AA'}{3} = \frac{2\sqrt{3} l \omega \Delta t}{3}$$

Отсюда находим скорость ползуна В

$$v_B = \frac{BB'}{\Delta t} = \frac{2\sqrt{3} l \omega}{3}$$

Чтобы найти мгновенное ускорение ползуна, нужно найти изменение его скорости в рассматриваемый момент времени. Для этого рассмотрим два малых интервала Δt - предшествующий положению, показанному на рисунке в условии, и последующий за ним. И теперь нужно найти разность перемещений точки А за эти два интервала времени.

Поскольку в положении ОА кривошип параллелен отрезку ЕВ, перемещения середины кулисы $A'A''$ и $A''A'$ (см. рисунок) будут одинаковыми за оба эти интервала времени. А вот поскольку предшествующее перемещение находится дальше от отрезка ЕВ, чем последующее, перемещения точки В за эти два интервала времени будут разными.



За предшествующий интервал времени Δt :

$$B''B = \frac{2\sqrt{3}l}{\sqrt{3}l - AA'} \cdot A'A'' = \frac{2\sqrt{3}l}{\sqrt{3}l - AA'} \cdot \frac{\sqrt{3}AA'}{3} \quad (*)$$

За последующий интервал времени Δt :

$$BB' = \frac{2\sqrt{3}l}{\sqrt{3}l + AA'} \cdot A'A'' = \frac{2\sqrt{3}l}{\sqrt{3}l + AA'} \cdot \frac{\sqrt{3}AA'}{3} \quad (**)$$

(здесь использовано подобие треугольников $CA'A''$ и $CB''B$, а также $CA'A''$ и $CB'B'$). Вычитая разности перемещений (*) и (**) и деля их на $2\Delta t^2$ (2 – поскольку мы нашли изменение скорости за интервал времени $2\Delta t$, а само перемещение AA' за $2\Delta t$), найдем мгновенное ускорение a ползуна В в рассматриваемый момент времени

$$a = \frac{B''B - BB'}{\Delta t^2} = 2\sqrt{3}l \cdot \frac{\sqrt{3}AA'}{3\Delta t^2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}l - AA'} - \frac{1}{\sqrt{3}l + AA'} \right)$$

Приводя дроби в скобках к общему знаменателю и пренебрегая в знаменателе малыми величинами AA' по сравнению с $\sqrt{3}l$, получим

$$a = \frac{2(AA')^2}{3l\Delta t^2}$$

А поскольку перемещение AA' поворотной втулки равно $AA' = l\omega\Delta t$, получаем окончательно

$$a = \frac{2}{3}\omega^2 l$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея нахождения скорости ползуна – нахождение малого перемещения кривошипа и поворотной втулки А, а затем перемещения ползуна - 1 балл
2. Правильная геометрия перемещений поворотной втулки А и ползуна – 1 балл
3. Правильная скорость ползуна – 1 балл
4. Правильное идея нахождения ускорения ползуна вычисление разности перемещений ползуна до и после перпендикулярного расположения кривошипа – 1 балл
5. Правильное ответ для мгновенного ускорения ползуна – 1 балл.

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.