

Решения и критерии оценки работ очного отборочного тура

Инженерной олимпиады школьников

11 класс, 2022-2023 учебный год

1. Из данных условия находим среднюю плотность загрязненной жидкости

$$\rho_{cp} = \frac{m}{V}$$

С другой стороны, среднюю плотность смеси можно найти через плотности компонент. Пусть масса воды в загрязненной жидкости m_1 , масса нефти - m_2 . Тогда для средней плотности имеем

$$\rho_{cp} = \frac{m}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}}$$

где m_1 и m_2 - массы воды и нефти в смеси. Поскольку $m = m_1 + m_2$, эту формулу можно продолжить так

$$\rho_{cp} = \frac{m}{\frac{m - m_2}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}}$$

Поэтому

$$\frac{m - m_2}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} = V$$

Отсюда находим

$$m_2 = \frac{(V\rho_1 - m)\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = 1100 \text{ кг}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильное использование формулы, связывающей массу, плотность и объем - 0,5 балла.
2. Правильное использование средней плотности – 0,5 балла.
3. Правильное уравнение, из которого можно найти массу нефти в загрязненной жидкости – 0,5 балла
4. Правильный ответ – и формула и число – 0,5 балла.

2. Уравнение теплового баланса для рассматриваемых порций воды дает

$$m(t - t_x) + 2m(2^2t - t_x) + 3m(3^2t - t_x) + 4m(4^2t - t_x) + \dots + 10m(10^2t - t_x) = 0$$

В результате имеем

$$mt_x(1 + 2 + 3 + \dots + 10) = mt(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3)$$

Суммы в скобках можно вычислить непосредственно, а можно воспользоваться известными формулами для суммы натуральных чисел и суммы кубов натуральных чисел

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Поэтому имеем

$$t_x = \frac{n(n+1)}{2} t$$

где $n = 10$. Отсюда $t_x = 55^\circ \text{C}$.

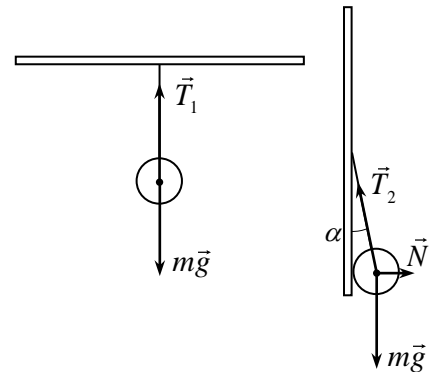
Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная формула для полученного нагреваемым телом количества теплоты – 0,5 балла.
2. Правильные уравнения теплового баланса – 0,5 балла.
3. Правильное суммирование суммы целых чисел и суммы кубов целых чисел (либо общие формулы, либо непосредственное) – 0,5 балла
4. Правильный ответ для температуры смеси – 0,5 балла.

3. Пусть масса шара m . Тогда сила натяжения нити в первом случае равна силе тяжести шара

$$T_1 = mg.$$

Во втором случае на шар действуют сила тяжести, сила натяжения нити и сила реакции доски. Поэтому сила натяжения компенсирует не только силу тяжести, но еще и силу реакции доски и, следовательно, должна вырасти по сравнению с первым случаем. Найдем, во сколько раз.



Условие равновесия шара во втором случае в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси дает

$$T_2 \cos \alpha = mg$$

$$T_2 \sin \alpha = N$$

где T_2 - сила натяжения во втором случае, α - угол между нитью и вертикалью во втором случае, N - сила реакции доски. Отсюда находим

$$T_2 = \frac{mg}{\cos \alpha}$$

Косинус угла α найдем геометрически. Из треугольника, образованного нитью, шаром и участком доски находим

$$\sin \alpha = \frac{1}{4}$$

Поэтому

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

и, следовательно

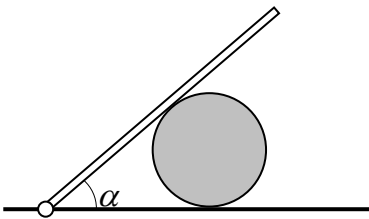
$$T_2 = \frac{4mg}{\sqrt{15}}$$

То есть при расположении доски вертикально сила натяжения вырастет в

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{4}{\sqrt{15}} = 1,03 \text{ раза}$$

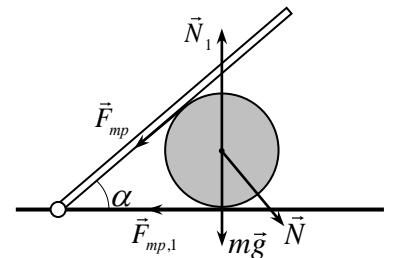
Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Правильная сила натяжения веревки в случае отсутствия касания между шаром и доской – 0,5 балла.
2. Правильное условие равновесия шара в случае вертикальной доски – 0,5 балла.
3. Правильные тригонометрические функции угла между нитью и доской во втором случае – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла.



4. Массивный стержень шарнирно закреплен на горизонтальной поверхности. Стержень опирается на массивный шар, лежащий на этой поверхности (см. рисунок). При каких углах α между стержнем и поверхностью система будет находиться в равновесии, если коэффициенты трения стержня о шар и шара о поверхность одинаковы и равны μ . Трением качения пренебречь.

4. Пусть сила нормальной реакции между стержнем и шаром (которая зависит от массы стержня и угла α) равна \vec{N} . Силы, действующие на шар, показаны на рисунке. Здесь $m\vec{g}$ сила тяжести шара, \vec{N}_1 - сила реакции горизонтальной поверхности, \vec{F}_{mp} и $\vec{F}_{mp,1}$ - силы трения между шаром и стержнем и шаром и горизонтальной поверхностью соответственно. Поскольку силы тяжести и реакции приложены к центру шара, их моменты относительно центра равны нулю, и из условия моментов относительно центра шара заключаем, что в равновесии силы трения равны друг другу. Поэтому условие равновесия в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси дает



$$F_{mp} + F_{mp} \cos \alpha = N \sin \alpha$$

$$N_1 = N \cos \alpha + mg + F_{mp} \sin \alpha$$

Из этих формул находим

$$F_{mp} = \frac{N \sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad N_1 = N + mg \quad (*)$$

При этом условия отсутствия проскальзывания в точках касания шара и стержня, шара и горизонтальной поверхности

$$F_{mp} \leq \mu N, \quad F_{mp} \leq \mu N_1 = \mu(N + mg)$$

дают условия на угол α в равновесии системы. Из этих формул видим, что с ростом угла α (или с уменьшением коэффициента трения) первым нарушается первое условие, которое вместе с первой формулой (*) и определяет равновесное значение угла наклона стержня

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \leq \mu$$

Используя формулу для тангенса половинного угла эту условие можно привести к виду

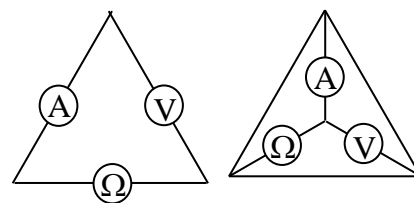
$$\operatorname{tg}(\alpha/2) \leq \mu \quad \text{или} \quad \alpha \leq 2 \operatorname{arctg}(\mu) \quad (**)$$

Отметим, что из проведенного анализа можно сделать вывод, как начнет двигаться шар при увеличении угла α или уменьшении коэффициента трения. Поскольку первым нарушается условие отсутствия проскальзывания между шаром и стержнем, при увеличении угла α или уменьшении коэффициента трения шар начнет катиться по горизонтальной поверхности, не проскальзывая относительно нее. При этом такое положение будет иметь место при любых значениях силы N . Т.е. даже бесконечно легкий стержень заставит катиться шар при нарушении условия (**). Это связано с пренебрежением трением качения (которое мы использовали в решении), которое в реальной ситуации не позволит катиться шару.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Доказательство одинаковости сил трения – 0,5 балла.
2. Правильные условия равновесия в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси – 0,5 балла.
3. Правильно найдены силы трения и реакции – 0,5 балла
4. Правильный ответ – 0,5 балла.

5. Когда амперметр, вольтметр и омметр соединены «треугольником» (левый рисунок), приборы показывают: амперметр - $I_1 = 1$ мА, вольтметр - $U_1 = 2$ В, омметр - $R_1 = 2200$ Ом. Какими будут показания вольтметра и омметра, если их соединить звездой (правый рисунок) и если известно, что при таком соединении амперметр показывает силу тока $I_2 = 3$ мА? Найти также внутренние сопротивления всех приборов. **Указание.** Омметр представляет собой последовательно соединенные идеальный источник постоянного напряжения, резистор и идеальный амперметр. При подключении к внешнему резистору омметр измеряет силу тока и автоматически пересчитывает ее в значение внешнего сопротивления.



будут показания вольтметра и омметра, если их соединить звездой (правый рисунок) и если известно, что при таком соединении амперметр показывает силу тока $I_2 = 3$ мА? Найти также внутренние сопротивления всех приборов. **Указание.** Омметр представляет собой последовательно соединенные идеальный источник постоянного напряжения, резистор и идеальный амперметр. При подключении к внешнему резистору омметр измеряет силу тока и автоматически пересчитывает ее в значение внешнего сопротивления.

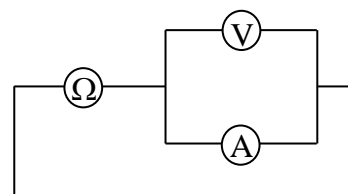
5. Найдем сначала сопротивления вольтметра и амперметра. Поскольку вольтметр показывает напряжение на самом себе, напряжение на нем U_1 , ток через него - I_1 . Поэтому

$$r_V = \frac{U_1}{I_1} = 2000 \text{ Ом} \quad (1)$$

Омметр показывает суммарное сопротивление вольтметра и амперметра, поэтому сопротивление амперметра r_A составляет

$$r_A = R_1 - \frac{U_1}{I_1} = 200 \text{ Ом} \quad (2)$$

Рассмотрим теперь соединение приборов «звездой». Очевидно, схема эквивалентной цепи может быть нарисована так, как это показано на рисунке. А поскольку в этом положении амперметр показывает ток



I_2 , то напряжение на нем равно

$$r_A I_2 = 0,6 \text{ В} \quad (3)$$

Но вольтметр и амперметр соединены параллельно, поэтому таким же будет и показание вольтметра во втором случае

$$U_2 = r_A I_2 = \left(R_1 - \frac{U_1}{I_1} \right) I_2 = 0,6 \text{ В}$$

Поскольку во втором случае к омметру подключены параллельно соединенные амперметр и вольтметр, его показания составляют

$$R_2 = \frac{r_V r_A}{r_V + r_A} = \frac{\frac{U_1}{I_1} \left(R_1 - \frac{U_1}{I_1} \right)}{R_1} = \frac{U_1 (R_1 I_1 - U_1)}{R_1 I_1^2} = 182 \text{ Ом}$$

Найдем теперь внутреннее сопротивление омметра и напряжение его источника. В первом случае ток через омметр равен I_1 , напряжение на нем $I_1 R_1$. Поэтому для напряжения источника омметра в первом случае имеем

$$U_\Omega = I_1 r_\Omega + I_1 R_1 \quad (3)$$

Во втором случае ток через омметр равен

$$I_2 + \frac{U_2}{r_V} = I_2 + \frac{(R_1 - (U_1/I_1))}{U_1/I_1} I_2 = I_2 + \frac{(I_1 R_1 - U_1)}{U_1} I_2 = \frac{I_1 R_1}{U_1} I_2$$

а напряжение на нем - U_2 . Поэтому для напряжения источника омметра имеем во втором случае

$$U_\Omega = \frac{I_1 I_2 R_1}{U_1} r_\Omega + U_2 = \frac{I_1 I_2 R_1}{U_1} r_\Omega + \frac{(I_1 R_1 - U_1) I_2}{I_1} \quad (4)$$

Приравнявая (3) и (4) найдем сопротивление омметра

$$r_\Omega = \frac{[R_1 I_1 (I_1 - I_2) + U_1 I_2] U_1}{I_1^2 (I_2 R_1 - U_1)} = 697 \text{ Ом}$$

Соберем вместе все ответы.

Показания вольтметра и омметра при соединении звездой:

$$U_2 = \left(R_1 - \frac{U_1}{I_1} \right) I_2 = 0,6 \text{ В}, \quad R_2 = \frac{U_1 (R_1 I_1 - U_1)}{R_1 I_1^2} = 182 \text{ Ом}.$$

Сопротивления амперметра, вольтметра и омметра:

$$r_A = R_1 - \frac{U_1}{I_1} = 200 \text{ Ом}, \quad r_V = \frac{U_1}{I_1} = 2000 \text{ Ом}, \quad r_\Omega = \frac{[R_1 I_1 (I_1 - I_2) + U_1 I_2]}{I_1^2 (I_2 R_1 - U_1)} = 348 \text{ Ом}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

- 1. Правильные значения сопротивлений амперметра и вольтметра – 0,5 балла.**
- 2. Правильная эквивалентная цепь во втором случае – 0,5 балла.**
- 3. Правильное напряжение источника тока омметра – 0,5 балла**
- 4. Правильное сопротивление омметра – 0,5 балла.**

6. Докажем, что сила натяжения стержня 6 равна нулю. Действительно, пусть эта сила не равна нулю. Тогда условие равновесия узлов I и II (см. рисунок) дают

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_4 + \vec{F}_3 + \vec{F}_6 &= 0 && \text{для узла I} \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_5 &= 0 && \text{для узла II} \end{aligned}$$

(на рисунке принято определенные направления сил натяжения стержней; доказательство равенства нулю силы натяжения стержня 6 от этих направлений не зависит). Благодаря симметрии конструкции относительно «право-лево» силы натяжения стержней 4 и 5 одинаковы. Поэтому условия равновесия узлов I и II в проекциях на оси перпендикулярные стержням 1 и 2 соответственно будут одинаковы за исключением силы натяжения стержня 6, которая, таким образом, должна быть равна нулю

$$\vec{F}_6 = 0$$

Это значит, что стержень 6 можно удалить из конструкции, а для нее справедливо и условие симметрии «верх-низ». То есть

$$F_1 = F_2 = F_8 = F_9; \quad F_4 = F_5; \quad F_3 = F_7$$

Теперь из условия равновесия самого левого узла (см. рисунок) заключаем, что стержни 1 и 2 (и, следовательно, 8 и 9) будут сжаты, а силы их натяжения равны

$$F_1 = F_2 = F_8 = F_9 = \frac{F}{2 \cos 45^\circ} = \frac{F}{\sqrt{2}}$$

Поэтому из условия равновесия верхних или нижних узлов заключаем, что стержни 4 и 5 тоже будут сжаты, а стержни 3 и 7 растянуты. Поэтому из условия равновесия, например, узла II (см. рисунок)

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_5 = 0$$

в проекциях на горизонтальную ось получаем, что $F_2 = F_5$, и, следовательно,

$$F_4 = F_5 = \frac{F}{\sqrt{2}}.$$

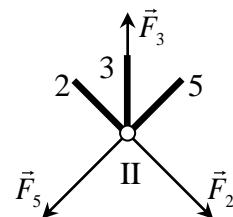
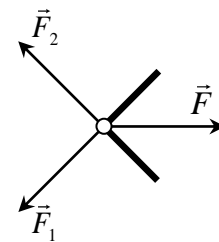
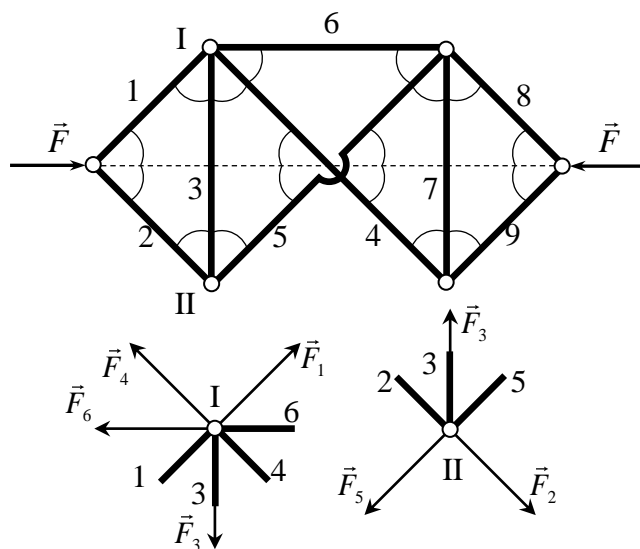
А из условия равновесия в проекциях на вертикальную ось

$$F_3 = 2F_2 \cos 45^\circ$$

находим

$$F_3 = F_7 = F$$

Итак:



стержни 1, 2, 4, 5, 8, 9 – сжаты, $F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = F_8 = F_9 = \frac{F}{\sqrt{2}}$

стержни 3 и 7 - растянуты, $F_3 = F_7 = F$

стержень 6 не нагружен, $F_6 = 0$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 2 балла)

1. Доказательство равенства нулю силы натяжения стержня 6 – 0,5 балла.
2. Доказательство равенства сил натяжения стержней 1, 2, 4, 5, 8 и 9, а также сил натяжения стержней 3 и 7 – 0,5 балла.
3. Правильный ответ для сил натяжения 1, 2, 4, 5, 8 и 9 стержней – 0,5 балла
4. Правильный ответ для сил натяжения 3 и 7 стержней – 0,5 балла.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 12 баллов. Допустимыми являются все целые или «полуцелые» оценки от 0 до 12.