Решения и критерии оценивания работ заключительного тура Инженерной олимпиады школьников

9 класс, 2022-2023 учебный год

1. Пусть масса пластины (до просверливания отверстий) равна M , а масса вещества, удаленного в первом случае при просверливании отверстий, равна Δm. Тогда, учитывая, что масса удаленного вещества во втором случае вдвое больше массы, удаленной во втором случае, имеем

$$M = m_1 + \Delta m$$
$$M = m_2 + 2\Delta m$$

Умножая первое уравнение системы на 2, и вычитая второе уравнение из первого, найдем

$$M = 2m_1 - m_2$$

В результате для плотности пластины получаем

$$\rho = \frac{2m_1 - m_2}{V}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):
1. Знание формулы, связывающей массу, плотность и объем - 1 балл
2. Правильное уравнение для массы пластины после просверливания первой группы отверстий – 1 балл
3. Понимание того, что во втором случае удалили вдвое большую массу – 1 балл
4. Правильная система для массы пластины – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

2. Пусть на станцию за малый интервал времени Δt из магистрального водопровода поступает масса воды $\Delta\mu$; такое же количество нагретой воды уходит со станции, поскольку вода не накапливается и не теряется на станции. За это время нагреватель выделяет количество теплоты

$$\Delta Q = P\Delta t$$

(P - мощность нагревателей). Это тепло расходуется на нагревание воды, поступающей на станцию из магистрального водопровода, и воды, которая вернулась в поток после отдачи тепла самой станции. Поэтому если в систему нагрева станции за интервал времени Δt уходила масса воды Δm, то мимо нагревателя за время Δt проходила масса воды $\Delta\mu + \Delta m$, причем Δm составляет (в первом случае) десятую часть всего потока, проходящего мимо нагревателя, т.е.

$$\Delta m = \frac{1}{10}\left(\Delta\mu + \Delta m\right) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta m = \frac{1}{9}\Delta\mu$$

Следовательно, уравнение теплового баланса в первом случае дает

$$c\frac{10}{9}\Delta\mu\Delta T = P\Delta t$$

Во втором случае для отопления самой станции используется восьмая часть потока, нагреваемого нагревателем, поэтому уравнение теплового баланса дает

$$c\frac{8}{7}\Delta\mu\Delta T_1 = P\Delta t$$

Деля эти формулы друг на друга, получим

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_1} = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{7} = \frac{36}{35}$$

Отсюда

$$\Delta T_1 = \frac{35}{36} \Delta T$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):
1. Знание формулы для количества выделенной теплоты - 1 балл
2. Правильное распределение потоков воды на станции – 1 балл
3. Правильное уравнение теплового баланса в первом случае (когда для отопления станции используется десятая часть потока воды, нагреваемой нагревателем) – 1 балл
4. Правильное уравнение теплового баланса во втором случае (когда для отопления станции используется восьмая часть потока воды, нагреваемой нагревателем) – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

3. Основная идея работы компенсатора тепловых расширений заключается в следующем. Очевидно, расстояние между зеркалами равно длине верхнего иридиевого стержня плюс расстояние от его левого конца до левого зеркала, которое в свою очередь равно длине нижнего иридиевого стержня минус длина никелевого стержня:

$$\Delta x = l + (l - x) = 2l - x$$

Здесь l - длина иридиевых стержней, x - длина никелевого стержня. Пусть при тепловом расширении длина иридиевого стержня увеличилась на δl, а длина никелевого – на δx. Тогда расстояние между зеркалами изменится на

$$\delta(\Delta x) = 2\delta l - \delta x$$

Из этой формулы следует, что если

$$2\delta l = \delta x, \qquad (*)$$

то расстояние между зеркалами не меняется при тепловом расширении (или сжатии при охлаждении; оно отличается от расширения только знаком удлинений). Используя указание к условию задачи, получим из (*) при нагреве на ΔT:

$$2\alpha_1 l \Delta T = \alpha_2 x \Delta T$$

Откуда находим, что

$$x = \frac{2\alpha_1 l}{\alpha_2} \Delta T = 9{,}7 \text{ см}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):
1. Умение использовать формулу для теплового расширения - 1 балл
2. Правильное объяснение принципа работы компенсатора тепловых расширений – 1 балл
3. Объяснение того, что тепловое расширение среднего стержня должно быть вдвое больше, удлинений верхнего и нижнего – 1 балл
4. Правильное уравнение «баланса длин» – 1 балл

5. Правильный ответ – 1 балл
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

4. Чтобы найти выделяемую нагревателем мощность, нужно знать сопротивление проволоки. А чтобы найти его - площадь сечения проволоки и длину спирали. Поскольку спираль свернута плотно, диаметр проволоки d, из которой изготовлена спираль, равен

$$d = \frac{R}{N}$$

а площадь сечения проволоки

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi R^2}{4N^2}$$

Найдем длину спирали. Так как витков по условию очень много, каждый виток мало отличается от окружности. Поэтому можно считать, что спираль состоит из N окружностей с радиусами

$$r_1 = \frac{R}{N},\ r_2 = 2\frac{R}{N},\ r_3 = 3\frac{R}{N},\ \ldots,\ r_N = N\frac{R}{N} = R$$

Поэтому ее длина есть

$$L = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 + \ldots + 2\pi r_N = \frac{2\pi R}{N}\left(1 + 2 + 3 + \ldots + N\right)$$

Используя далее известную формулу для суммы N натуральных чисел, получим

$$L = 2\pi r_1 + 2\pi r_2 + \ldots + 2\pi r_N = \frac{2\pi R}{N}\frac{N\left(N+1\right)}{2} = \pi R\left(N+1\right) \approx \pi RN$$

Поэтому сопротивление спирали равно

$$r = \frac{\rho L}{S} = \frac{\rho \pi RN}{S}$$

Поскольку по условию витки намотаны плотно, площадь сечения проволоки можно связать с радиусом спирали и числом витков

$$S = \frac{\pi R^2}{4N^2} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{\rho \pi RN 4N^2}{\pi R^2} = \frac{4\rho N^3}{R}$$

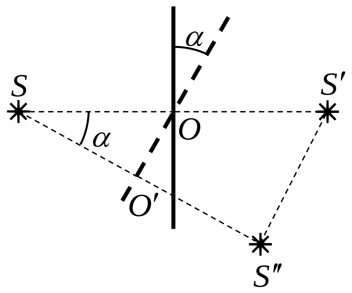
Теперь по закону Джоуля-Ленца находим мощность, выделяемую в спирали при приложении напряжения U (можно выразить эту величину через количество витков и радиус спирали, а можно через площадь сечения провода):

$$P = \frac{U^2}{r} = \frac{U^2 S}{\pi \rho RN} = \frac{U^2 R}{4\rho N^3}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):
1. Правильная идея решения – нахождение сопротивления спирали и использование закона Джоуля-Ленца – 1 балл
2. Знание связи сопротивления проволоки с ее геометрическими параметрами (длиной и площадью сечения) - 1 балл
3. Правильное использование закона Джоуля-Ленца – 1 балл

4. Правильный принцип вычисления длины спирали (если используется длина среднего витка, должно быть обоснование выбора среднего) – 1 балла
5. Правильная формула для длины спирали, правильный ответ – 1 баллов
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

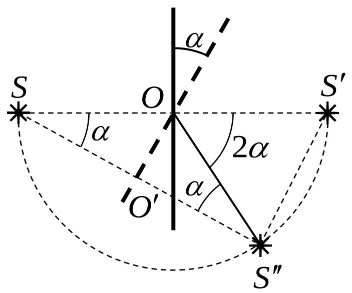
5. Определим характер движения изображения. Построение старого (S') и нового (S''; после поворота зеркала на угол α) изображения источника выполнено на рисунке. Очевидно угол $SS''S'$ - прямой. Действительно, треугольники $SO'O$ и $SS''S'$ подобны, так как у них общий угол α, а стороны, примыкающие к этому углу пропорциональны с коэффициентом подобия 2 (поскольку расстояние от источника до изображения вдвое больше расстояния от источника до зеркала):



$$\frac{SS'}{SO} = \frac{SS''}{SO'} = 2$$

А поскольку угол $SO'O$ - прямой (изображение источника лежит на продолжении перпендикуляра, опущенного из источника на зеркало), то прямым является и угол $SS''S'$. Причем независимо от угла поворота зеркала. Это значит, что изображение источника движется по такой кривой, что угол $SS''S'$ все время остается прямым. Отсюда следует, что изображение источника движется по окружности, для которой отрезок SS' является диаметром. А потому радиус этой окружности равен расстоянию от источника до оси вращения зеркала, т.е. $R = SO = d$. Эта окружность показана на рисунке справа.

Найдем теперь угловую скорость вращения изображения. Пусть зеркало повернулось на угол α. Тогда (поскольку траектория движения изображения – окружность) $OS = OS''$ и $\angle OSS'' = \angle OS''S = \alpha$ (эти углы отмечены на рисунке). Поэтому $\angle S'OS'' = 2\alpha$, и, следовательно, изображение вращается с постоянной угловой скоростью ω', которая вдвое больше угловой скорости зеркала



$$\omega' = 2\omega$$

Поэтому скорость изображения источника постоянна (т.к. не зависит от угла поворота зеркала α) и равна

$$v = \omega' R = 2\omega R = 2\omega d = 1 \text{ м/с.}$$

Поскольку изображение движется по окружности с постоянной по величине скоростью, его ускорение – центростремительное. Оно равно

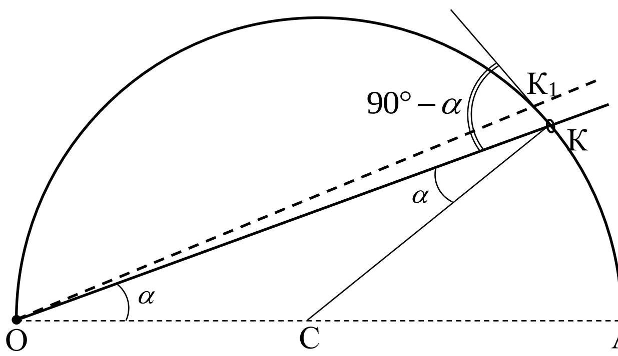
$$a = \omega'^2 R = 4\omega^2 R = 4\omega^2 d = 2 \text{ м/с}^2.$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильное построение изображения точечного источника в зеркале – 1 балл
2. Доказательство, что изображение движется по окружности - 1 балл
3. Правильное нахождение угловой скорости изображения – 1 балл
4. Правильная формула для центростремительного ускорения – 1 балл
5. Правильный ответ для ускорения изображения – 1 балла
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Рассмотрим такое положение стержня, когда угол между ним и диаметром, замыкающим полукольцо, равен α. И пусть после этого момента прошел малый интервал времени Δt. Тогда стержень повернется на малый угол $\Delta\alpha = \omega\Delta t$ (см. рисунок; положение стержня спустя интервал времени Δt показано пунктиром). Найдем перемещение колечка по полукольцу.

Очевидно, угол между стержнем и полукольцом в рассматриваемом положении равен $90° - \alpha$ (этот угол отмечен на рисунке двумя дугами). Действительно, угол между стержнем и радиусом СК, проведенным к колечку, равен α (так как треугольник ОСК – равнобедренный), а полукольцо перпендикулярно радиусу СК (см. рисунок). Поэтому перемещение Δx колечка, которое принадлежит одновременно и стержню и полукольцу, можно найти как (см. рисунок; отрезок Δx отмечен на рисунке как КК$_1$):



$$\Delta x = \frac{r\Delta\alpha}{\cos\alpha} = \frac{r\omega\Delta t}{\cos\alpha} \qquad (*)$$

где r - длина участка стержня от оси его вращения до колечка. Эту длину легко найти из равнобедренного треугольника ОСК или прямоугольного треугольника ОАК

$$r = 2R\cos\alpha \qquad (**)$$

где R - радиус полукольца. В результате из формул (*)-(**) заключаем, что перемещение колечка по стержню не зависит от угла α и составляет

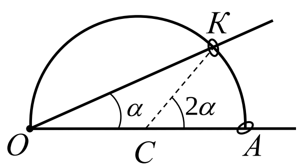
$$\Delta x = 2R\omega\Delta t$$

Поэтому линейная скорость колечка равна $2R\omega$, а угловая

$$\omega_K = 2\omega$$

Таким образом, из этой формулы следует, что угловая скорость колечка не зависит от угла между стержнем и диаметром ОА, замыкающим полукольцо, и равна удвоенной угловой скорости вращения стержня.

То обстоятельство, что угловая скорость колечка является постоянной, можно объяснить и по-другому. Найдем среднюю угловую скорость колечка за то время, пока стержень повернется на некоторый угол α по отношению к диаметру ОА, замыкающему колечко. Очевид-



но, колечко повернется за это время на удвоенный угол, независимо от угла поворота стержня. Действительно, угол, опирающийся на дугу окружности и лежащий на самой окружности всегда вдвое меньше угла, лежащего в центре окружности и опирающегося на ту же дугу. Поэтому средняя угловая скорость колечка равна

$$\omega_{K,cp} = \frac{2\alpha}{t} = 2\omega$$

независимо от того, за какое время вычисляется эта скорость. А, следовательно, и мгновенная угловая скорость не зависит от α и равна этой величине.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):
1. Правильная идея решения – рассмотреть малый интервал времени и найти перемещение колечка, которое движется одновременно по стержню и полукольцу – 1 балл
2. Правильное нахождение угла поворота стержня за малый интервал времени - 1 балл
3. Правильное нахождение перемещения колечка за малый интервал времени – 1 балл
4. Правильный ответ для угловой скорости колечка – 1 балла
5. Доказательство, того, что мгновенная угловая скорость колечка не меняется – 1 балл
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Оценка работы
Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.