

Решения и критерии оценивания

1. Найдем удлинение кольца. Его длина складывается из трех участков длиной $2R$ между трубами (показаны красным на рисунке), и трех участков, касающихся труб (зеленый). Поскольку эти участки опираются на угол, составляющий третью часть полного угла, то длина их всех равна $2\pi R$. Поэтому длина растянутого кольца есть

$$6R + 2\pi R$$

Поскольку длина кольца в недеформированном состоянии равна $7R$, его удлинение составляет

$$\Delta l = (2\pi - 1)R$$

И потому сила его натяжения есть

$$F = (2\pi - 1)kR$$

А так как силы взаимодействия труб N направлены точно так же, как и силы натяжения кольца, то они равны силе натяжения кольца и по величине

$$N = (2\pi - 1)kR \approx 5,28kR$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная геометрия сил – сила взаимодействия труб равна силе натяжения кольца - 1 балл
 2. Правильный способ вычисления длины натянутого кольца – разбиение кольца на прямые участки и участки, охватывающие трубы – 1 балл
 3. Правильное нахождение длины натянутого кольца – 1 балл
 4. Правильное использование закона Гука – 1 балл
 5. Правильный ответ – 1 балл
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

2. Рассмотрим массу m смеси бензина и биоэтанола. Тогда для масс бензина m_B и биоэтанола $m_Э$ в смеси выполнены следующие условия

$$m = m_B + m_Э$$

$$\frac{m_B q_B}{m_Э q_Э} = 3$$

Решая эту систему уравнений, получим для масс бензина и биоэтанола в смеси

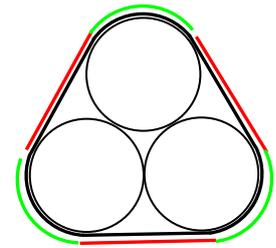
$$m_B = \frac{3q_Э m}{3q_Э + q_B}, \quad m_Э = \frac{q_B m}{3q_Э + q_B}.$$

Отсюда легко найти массовые доли бензина и биоэтанола в смеси

$$v_B = \frac{m_B}{m} = \frac{3q_Э}{3q_Э + q_B} = 0,66 \quad v_Э = \frac{m_Э}{m} = \frac{q_B}{3q_Э + q_B} = 0,34$$

и удельную теплоту сгорания смеси

$$q = \frac{m_B q_B + m_Э q_Э}{m} = \frac{4q_B q_Э}{3q_Э + q_B} = 39,0 \text{ МДж/кг}$$



Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

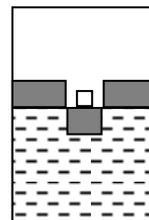
1. Правильная идея решения – составление системы уравнений для масс бензина и этанола в смеси - 1 балл
 2. Правильная система уравнений для масс бензина и этанола в смеси – 1 балл
 3. Правильно найдены массовые доли бензина и этанола в смеси (формула и число) – 1 балл
 4. Правильная формула для удельной теплоты сгорания смеси – 1 балл
 5. Правильное число для удельной теплоты сгорания смеси – 1 балл
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

3. Пусть масса поршня равна M . Тогда под поршнем создается давление воды

$$p = \frac{Mg}{S}.$$

(при опускании центральной части давление под остальной частью поршня останется таким же – пропорционально изменится масса остальной части и ее площадь).

Пусть максимальная масса тела, при которой центральная часть еще не выпадает из поршня, равна m . Тогда для самого нижнего положения центральной части (см. рисунок) давление воды под поверхностью центральной части поршня (с телом) будет больше давления под остальной частью поршня на ρgh



$$p_1 = p + \rho gh,$$

где h - толщина поршня. Это давление уравновесит массу центральной части поршня и дополнительную массу тела, причем массу тела будет уравновешивать именно избыточное давление воды под центральной частью по сравнению с ее давлением под остальной частью поршня

$$\frac{M}{3}g + mg = p \frac{S}{3} + \rho gh \frac{S}{3} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{3} \rho h S$$

Найдем теперь перемещение центральной части поршня относительно сосуда. Пусть это перемещение равно Δx . Тогда центральная часть при своем перемещении вытесняет объем воды

$$\Delta x \frac{S}{3}$$

Этот объем должен разместиться под остальной частью поршня, поднимая ее. Поэтому

$$\Delta x \frac{S}{3} = \Delta x_1 \frac{2S}{3}$$

где Δx_1 - перемещение остальной части поршня относительно сосуда к рассматриваемому моменту. Отсюда находим

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta x}{2}$$

А поскольку перемещение центральной части относительно остального поршня равно толщине поршня h , получаем

$$h = \Delta x + \Delta x_1 = \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x = \frac{3}{2} \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{2}{3} h, \quad \Delta x_1 = \frac{1}{3} h$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильный вывод, что давление воды под поршнем в начальный момент (без тела на центральной части) уравновешивает и центральную и остальную части поршня – 1 балл

2. **Правильный вывод, что давление воды под остальной частью поршня не изменится в процессе опускания центральной части - 1 балл**
 3. **Правильный вывод, что избыточное давление воды под центральной частью (по сравнению с ее давлением под остальной частью) уравнивает массу тела – 1 балл**
 4. **Правильный ответ для массы тела – 1 балла**
 5. **Правильные ответы для перемещения центральной части и остальной части поршня относительно сосуда – 1 баллов**
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.**

4. После порчи часов угловая скорость часовой стрелки стала равна

$$\omega_c = \frac{2\pi}{4} \text{ (рад/час)}$$

Поэтому за 24 часа (за сутки) часовая стрелка сделает 6 целых оборотов. Минутная стрелка (идущая с «правильной» угловой скоростью) сделает за сутки 24 целых оборота. Поэтому и в начале, и в конце суток положения стрелок совпадают. Очевидно, на каждом обороте минутной стрелки относительно часовой минутная стрелка дважды перпендикулярна часовой. Поэтому нужно посчитать количество оборотов минутной стрелки относительно часовой.

Очевидно, что количество оборотов минутной стрелки относительно часовой равно количеству встреч этих стрелок за сутки (кроме той встречи, с которой сутки начались). А поскольку часовая стрелка движется навстречу минутной и совершает за сутки 6 оборотов, а минутная – 24, то за сутки произойдет 30 встреч минутной и часовой стрелок. Поэтому за сутки на таких часах минутная стрелка будет перпендикулярна часовой стрелке 60 раз.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. **Правильный вывод, что за каждый оборот минутной стрелки относительно часовой стрелки бывают перпендикулярны 2 раза – 1 балл**
 2. **Правильная угловая скорость часовой стрелки (или количество оборотов, которая эта стрелка совершит за сутки) - 1 балл**
 3. **Правильно найдено (и обосновано) количество оборотов минутной стрелки относительно часовой – 2 балла (при отсутствии разумного обоснования – 1 балл)**
 4. **Правильный ответ – 1 балл**
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.**

5. Омметр измеряет силу электрического тока через измеряемый резистор и «пересчитывает» ее в его сопротивление, «зная» напряжение внутреннего источника питания и его сопротивление по формуле

$$I = \frac{\varepsilon}{R_x + r}$$

где R_x - величина измеряемого сопротивления, r внутреннее сопротивление омметра (сопротивление источника, амперметра и добавочного сопротивления). При этом шкалу амперметра можно проградуировать в единицах измеряемого сопротивления. Если подобрать добавочное сопротивление так, что при замкнутых накоротко клеммах омметра амперметр покажет предел его шкалы, то предельному току омметра будет соответствовать нулевое измеряемое сопротивление (нуль

шкалы омметра). Для нашего омметра добавочное сопротивление, очевидно, нужно выбрать так, чтобы внутреннее сопротивление омметра было равно

$$r = \frac{\varepsilon}{I_0} = 1500 \text{ Ом}$$

Нулевому току, очевидно, отвечает бесконечно большое измеряемое сопротивление – максимальный отсчет шкалы омметра. Конечно, такая шкала не линейна, поскольку в конечную шкалу «всунут» в бесконечно большой интервал измеряемых сопротивлений. Найдем, какое сопротивление соответствует середине шкалы амперметра. Поскольку середина шкалы амперметра отвечает току, равному половине предела его шкалы, имеем для искомого сопротивления R_x

$$\frac{I_0}{2} = \frac{\varepsilon}{R_x + r} \quad \Rightarrow \quad R_x = \frac{2\varepsilon}{I_0} - r = \frac{2\varepsilon}{I_0} - \frac{\varepsilon}{I_0} = \frac{\varepsilon}{I_0} = 1500 \text{ Ом}$$

Таким образом, отклонение стрелки амперметра на половину его шкалы соответствует измерению сопротивления $R_x = 1500 \text{ Ом}$.

Найдем теперь показания омметра, при подключении его к диоду. При подключении омметра отрицательной полярностью, ток через диод (и, следовательно, и через амперметр) равен нулю, и омметр покажет бесконечно большое сопротивление. При подключении омметра положительной полярностью, показания омметра будут ненулевыми, поскольку при нулевом токе к диоду прикладывалось бы напряжение $U = \varepsilon = 1,5 \text{ В}$, что больше напряжения «открытия» диода (вертикальный участок на вольтамперной характеристике). Следовательно, напряжение на диоде будет равно напряжению открытия $U_0 = 1 \text{ В}$, а вот ток определится законом Ома для источника, амперметра и добавочного сопротивления. Поскольку напряжение на них будет равно $\varepsilon - U_0$, поэтому ток в цепи будет определяться соотношением

$$I = \frac{\varepsilon - U_0}{r}$$

где $r = 1500 \text{ Ом}$ – внутреннее сопротивление омметра. Именно такой ток измерит амперметр, а он соответствует следующему измеряемому сопротивлению r_x

$$\frac{\varepsilon - U_0}{r} = \frac{\varepsilon}{r_x + r} \quad \Rightarrow \quad r_x = \frac{rU_0}{\varepsilon - U_0} = \frac{\varepsilon U_0}{I_0(\varepsilon - U_0)} = 3000 \text{ Ом}$$

Ответы:

Внутреннее сопротивление омметра равно $r = \frac{\varepsilon}{I_0} = 1500 \text{ Ом}$. Половине шкалы амперметра соответствует сопротивление $R_x = \frac{\varepsilon}{I_0} = 1500 \text{ Ом}$. При подключении омметра к диоду отрицательной полярностью омметр покажет сопротивление $r_x = \infty$. При подключении омметра к диоду положительной полярностью омметр покажет сопротивление $r_x = \frac{\varepsilon U_0}{I_0(\varepsilon - U_0)} = 3000 \text{ Ом}$.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

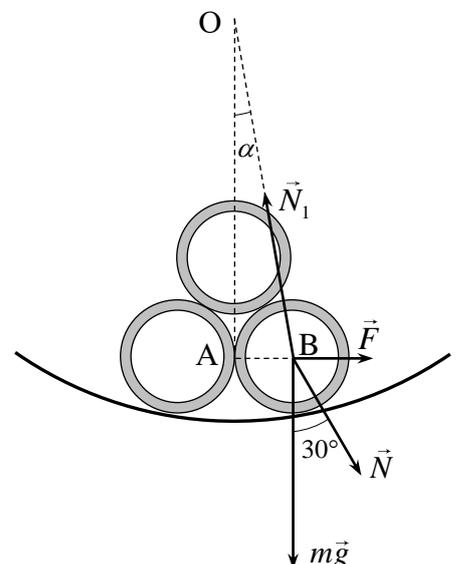
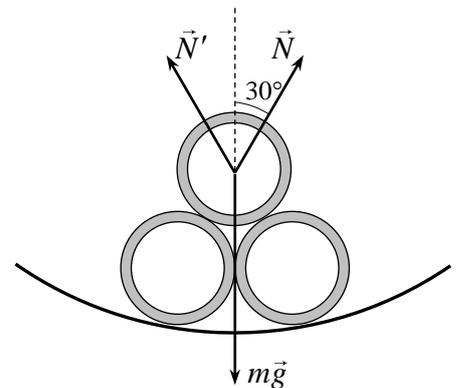
1. Правильный ответ для внутреннего сопротивления омметра – 1 балл
 2. Правильный ответ для измеряемого сопротивления при половинном отклонении стрелки амперметра - 1 балл
 3. Правильный ответ для показаний омметра при его подключении к диоду отрицательной полярностью – 1 балл
 4. Правильная идея нахождения показаний омметра при его подключении к диоду положительной полярностью – напряжение на диоде равно напряжению его открытия, а ток определяется током через омметр – 1 балл
 5. Правильный ответ для показаний омметра при его подключении к диоду положительной полярностью – 1 балл
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Если бы три внутренние трубы находились на гладкой горизонтальной поверхности (в положении, показанном на рисунке в условии – две внизу, а одна сверху между ними), они не смогли бы находиться в равновесии, поскольку на нижние трубы со стороны верхней действовала бы сила, имеющая горизонтальную составляющую, которую нечем компенсировать. Если три внутренние трубы были бы расположены в узкой внешней трубе, им было бы некуда раскатиться и они находились бы в равновесии. Это значит, что некоторое соотношение радиусов труб отвечает границе между этими случаями.

Это соотношение можно найти, рассматривая равновесие труб. При этом указанием на нарушение равновесия будет обращение в нуль силы реакции между малыми трубами. Найдем эту силу. На верхнюю трубу действуют сила тяжести и две силы реакции со стороны двух нижних труб. Очевидно, эти силы одинаковы (из симметрии задачи) и направлены под углом 30° к вертикали (потому что центры малых труб образуют равносторонний треугольник). Поэтому условие равновесия верхней трубы дает

$$2N \cos 30^\circ = mg \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{\sqrt{3}} mg \quad (1)$$

На каждую из двух нижних труб действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции со стороны верхней трубы \vec{N} (найденная в формуле (1)), сила реакции внешней трубы \vec{N}_1 и сила реакции между двумя нижними трубами \vec{F} (см. рисунок). Причем сила реакции со стороны верхней трубы направлена под углом 30° к вертикали, сила реакции между двумя нижними трубами - горизонтально, а сила реакции внешней трубы – перпендикулярно ее поверхности в точке касания малой трубы, т.е. к центру внешней трубы. Поэтому условие равновесия нижней малой трубы в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси дает



$$\begin{aligned} F + N \sin 30^\circ &= N_1 \sin \alpha \\ mg + N \cos 30^\circ &= N_1 \cos \alpha \end{aligned} \quad (2)$$

где α - угол между силой \vec{N}_1 и вертикалью. Геометрически очевидно, что

$$\sin \alpha = \frac{r}{R-r}$$

(это можно увидеть из треугольника OAB, у которого гипотенуза равна $R-r$, а противолежащий углу α катет - r). Поэтому

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R-r}$$

Из системы (2) с учетом (1) находим силу реакции между нижними трубами

$$F = \frac{mg}{2\sqrt{3} \cos \alpha} \left(3\sqrt{3}r - \sqrt{R^2 - 2Rr} \right)$$

Из этой формулы следует, что сила реакции между нижними стержнями обращается в нуль (и, следовательно, нижние трубы разъезжаются) если

$$3\sqrt{3}r - \sqrt{R^2 - 2Rr} = 0$$

или

$$\left(\frac{R}{r} \right)^2 - 2 \left(\frac{R}{r} \right) - 27 = 0$$

Решая это квадратное уравнение, получаем соотношение между радиусами труб, когда малые трубы начинают разъезжаться

$$\frac{R}{r} = 1 + 2\sqrt{7} = 6,29$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Правильно найдены силы реакции, действующие на верхнюю трубу – 1 балл**
 - 2. Правильное условие раскатывания труб – силы реакции между нижними трубами равны нулю - 1 балл**
 - 3. Правильное условие равновесия для нижних труб в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления – 1 балл**
 - 4. Правильное уравнение для отношения радиусов труб «на грани раскатывания» – 1 балл**
 - 5. Правильный ответ для отношения радиусов труб «на грани раскатывания» – 1 балл**
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.**

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.