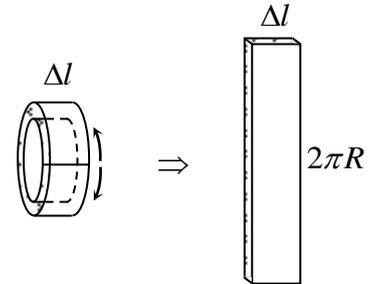


Решения и критерии оценивания

1. Рассмотрим малый элемент длины цилиндров длиной Δl . За некоторый малый интервал времени Δt в этом элементе выделится количество теплоты

$$\delta Q = \frac{U^2}{r} \Delta t$$

где r - сопротивление рассматриваемого элемента, которое можно найти следующим образом. Если мысленно разрезать рассматриваемый элемент по образующей и развернуть (см. рисунок), мы получим две параллельных металлических пластинки практически одинаковой площади $2\pi R\Delta l$ (т.к. разность радиусов цилиндров мала, в качестве R здесь можно взять и R_1 , и R_2 , и какое-то их среднее), находящихся на расстоянии $R_2 - R_1$ друг от друга. Поэтому сопротивление рассматриваемого элемента есть



$$r = \frac{\rho(R_1 - R_2)}{2\pi R\Delta l}$$

(ρ - удельное сопротивление воды), и, следовательно, в нем выделяется количество теплоты

$$\delta Q = \frac{U^2 2\pi R\Delta l}{\rho(R_1 - R_2)} \Delta t$$

Поскольку теплопотери отсутствуют, то количество теплоты, которое выделяется в этом элементе, должно уноситься протекающей через него водой. За время Δt в элемент втекает (и вытекает) масса воды

$$\Delta m = \rho_0 v \Delta t 2\pi R (R_2 - R_1)$$

где ρ_0 - плотность воды. Поэтому если разность температур вытекающей и втекающей воды есть ΔT , то вода уносит из рассматриваемого элемента количество теплоты

$$\delta Q = c \Delta m \Delta T = c \rho_0 v \Delta t 2\pi R (R_2 - R_1) \Delta T.$$

Приравнявая теперь количества выделившейся и унесенной теплоты,

$$\frac{U^2 2\pi R\Delta l}{\rho(R_1 - R_2)} \Delta t = c \rho_0 v \Delta t 2\pi R (R_2 - R_1) \Delta T$$

найдем изменение температуры воды на единицу длины цилиндров $\Delta T / \Delta l$

$$\frac{\Delta T}{\Delta l} = \frac{U^2}{c \rho_0 \rho v (R_2 - R_1)^2}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея решения – количество теплоты, выделившееся при протекании тока через воду, можно связать с изменением температуры этого элемента - 1 балл
2. Правильно определено сопротивление цилиндрического элемента воды малой длины – 1 балл

3. Правильно определена масса рассматриваемого элемента – 1 балл

4. Правильное уравнение теплового баланса – 1 балл

5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

2. Рассмотрим массу m смеси бензина и биоэтанола. Тогда для масс бензина m_B и биоэтанола $m_Э$ в смеси выполнены следующие условия

$$m = m_B + m_Э$$

$$\frac{m_B q_B}{m_Э q_Э} = 3$$

Решая эту систему уравнений, получим для масс бензина и биоэтанола в смеси

$$m_B = \frac{3q_Э m}{3q_Э + q_B}, \quad m_Э = \frac{q_B m}{3q_Э + q_B}.$$

Отсюда легко найти массовые доли бензина и биоэтанола в смеси

$$v_B = \frac{m_B}{m} = \frac{3q_Э}{3q_Э + q_B} = 0,66 \quad v_Э = \frac{m_Э}{m} = \frac{q_B}{3q_Э + q_B} = 0,34$$

и удельную теплоту сгорания смеси

$$q = \frac{m_B q_B + m_Э q_Э}{m} = \frac{4q_B q_Э}{3q_Э + q_B} = 39,0 \text{ МДж/кг}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея решения – составление системы уравнений для масс бензина и этанола в смеси – 1 балл

2. Правильная система уравнений для масс бензина и этанола в смеси – 1 балл

3. Правильно найдены массовые доли бензина и этанола в смеси (формула и число) – 1 балл

4. Правильная формула для удельной теплоты сгорания смеси – 1 балл

5. Правильное число для удельной теплоты сгорания смеси – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

3. В процессе $a-b$ газ не совершает работу, поэтому это процесс - изохорический с получением теплоты, т.е. с увеличением давления и температуры. Применение первого закона термодинамики к этому процессу дает

$$Q_{a-b} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{a-b} = \frac{3}{2} (p_b V_a - p_a V_a)$$

(ν - количество вещества газа, ΔT_{a-b} - изменение его температуры в процессе $a-b$, p_a и p_b - давление газа в состояниях a и b , V_a - объем газа в состоянии a (и b)). Поскольку (как это следует из данного в условии графика) $Q_{a-b} = 6$ кДж, то

$$p_b V_a = \frac{2}{3} Q_{a-b} + p_a V_a = 6 \text{ кДж и, следовательно, } p_b = 3p_a$$

Как следует из данного в условии задачи графика, работа газа в процессе $b-c$ составляет $2/5$ от количества теплоты, полученного газом в этом процессе. Такое соотношение работы и количества теплоты имеет место для изобарического процесса. Поэтому процесс $b-c$ – изобарический ($p_c = p_b = 3p_a$) с ростом объема и температуры. Работа газа в изобарическом процессе $b-c$ равна

$$A_{b-c} = p_b(V_c - V_b) = 3p_a(V_c - V_a) = 3p_aV_c - 3p_aV_a$$

Отсюда находим, что

$$p_aV_c = \frac{1}{3}A_{b-c} + p_aV_a = 4 \text{ кДж, и, следовательно, } V_c = 2V_a.$$

В процессе $c-d$ газ не совершает работы, поэтому этот процесс – изохорический. Применение первого закона термодинамики к этому процессу дает

$$Q_{c-d} = \frac{3}{2}(p_dV_d - p_cV_c) = \frac{3}{2}(p_d2V_a - 6p_aV_a)$$

где Q_{c-d} - количество тепла, полученного газом в этом процессе. Отсюда

$$p_dV_a = \frac{1}{3}Q_{c-d} + 3p_aV_a$$

А поскольку $Q_{c-d} = -12$ кДж (график в условии задачи), то $p_dV_a = 2$ кДж, и, значит, $p_d = p_a$.

Так как участки графика $b-c$ и $d-e$ параллельны, в процессе $d-e$ работа газа снова составляет $2/5$ от количества тепла, полученного газом. Поэтому это процесс изобарический, в котором уменьшаются объем и температура (поскольку $Q_{d-e}, A_{d-e} < 0$). А так как $p_d = p_a$, то начальное состояние a лежит на изобаре $d-e$ (или ее продолжении). Найдем объем газа в состоянии e – т.е. пойдем, является ли процесс замкнутым циклом, или он «недозамкнут» или «перезамкнут».

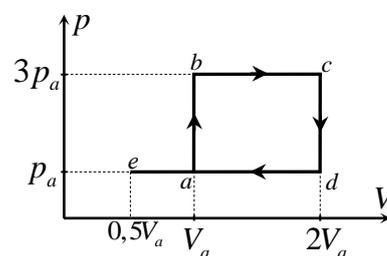
Работа газа в изобарическом процессе $d-e$ есть

$$A_{d-e} = p_d(V_e - V_d) = p_aV_e - p_a2V_a$$

Отсюда

$$p_aV_e = A_{d-e} + 2p_aV_a$$

Так как в процессе $d-e$ газ совершает работу $A_{d-e} = -3$ кДж (см. график условия), то $p_aV_e = 1$ кДж, и $V_e = 0,5V_a$. Следовательно, рассматриваемый процесс не является замкнутым циклом и «перезамкнут». График процесса в координатах «давление-объем» приведен на рисунке.



Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильно идентифицированы процессы, - - 1 балл
2. Правильно определено давление газа в состоянии b – 1 балл
3. Правильно определены объем в состоянии c – 1 балл
4. Правильный вывод, что начальное состояние a лежит на изобаре $d-e$, но рассматриваемый процесс не является замкнутым циклом, а «перезамкнут» – 1 балл

5. Правильный график процесса в координатах «давление-объем» с указанием давлений и объемов во всех состояниях – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

4. Найдем силу тока в цепи. Если напряжение источника меньше, чем напряжение открытия диода U_0 , диод закрыт, ток в цепи не течет и тепло не выделяется.

При $\varepsilon > U_0$ диод открывается, и в цепи течет электрический ток. Пусть сила этого тока равна I . Тогда напряжение на диоде равно

$$U_0 + \frac{I}{k},$$

а напряжение на резисторе - IR . Отсюда находим, что

$$IR + U_0 + \frac{I}{k} = \varepsilon$$

Или

$$I = \frac{(\varepsilon - U_0)k}{1 + kR} \quad (*)$$

Так как внутреннее сопротивление источника равно нулю, все энерговыделение в цепи происходит во внешней цепи, а мощность этого энерговыделения равна работе источника в единицу времени

$$P = \varepsilon I = \frac{\varepsilon(\varepsilon - U_0)k}{1 + kR} \quad (**)$$

Мощность на диоде выделяется, поскольку электрическое поле совершает работу по перемещению зарядов в диоде. Мощность этого энерговыделения проще всего найти как разность мощности, выделяемой во внешней цепи, и мощности, выделяемой на резисторе

$$P_0 = P - I^2 R$$

где $I^2 R$ - мощность, выделяемая на резисторе. Используя далее (*) и (**), получим

$$P_0 = \frac{\varepsilon(\varepsilon - U_0)k}{1 + kR} - \frac{(\varepsilon - U_0)^2 k^2 R}{(1 + kR)^2} = \frac{(\varepsilon - U_0)(\varepsilon + kRU_0)k}{(1 + kR)^2}.$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Правильный вывод, что при напряжении источника, меньшем напряжения открытия диода, ток через диод не течет, и тепло не выделяется - 1 балл**
 - 2. Правильная идея нахождения тока в цепи с использованием вольтамперной характеристики диода – 1 балл**
 - 3. Правильно система уравнений для напряжения на диоде и тока через него – 1 балл**
 - 4. Правильно найдены напряжение на диоде и ток через него – 1 балл**
 - 5. Правильный ответ для мощности, выделяемой на диоде – 1 балл**
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.**

5. Найдем, как меняется давление воды в сосуде, имеющем форму перевернутого конуса, при ее нагревании. Во-первых, заметим, что учитывать изменение размеров сосуда при нагревании нам не нужно, поскольку в условии сказано, что коэффициент теплового расширения стекла (из которого сделан сосуд) много меньше коэффициента теплового расширения воды.

Чтобы понять, как меняется давление воды в сосуде при нагревании, рассмотрим сначала более простую задачу, когда сосуд, в котором нагревают воду, цилиндрический. Пусть объем воды при нагревании увеличился в n раз: $V \rightarrow V' = nV$. Тогда с учетом того, что площадь сечения сосуда не меняется (сосуд не расширяется при нагревании), это приводит к увеличению высоты столба воды тоже в n раз:

$$V = Sh, \quad V' = nV = Sh', \quad \Rightarrow \quad h' = nh.$$

(S - площадь сечения сосуда, h и h' - старая и новая высота столбы воды). С другой стороны, увеличение объема воды в n раз приводит к уменьшению ее плотности в n раз:

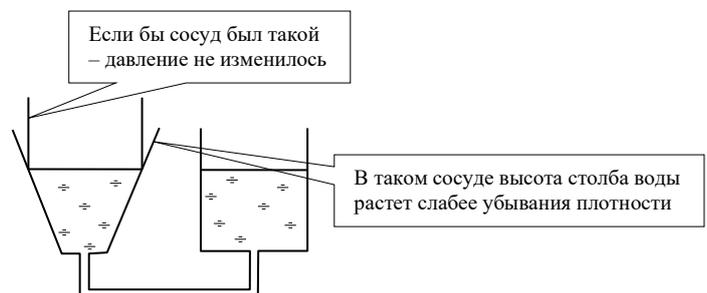
$$\rho = \frac{m}{V}, \quad \rho' = \frac{m}{V'} = \frac{m}{nV} = \frac{\rho}{n}$$

где m - масса воды в нагреваемом колене сосуда, ρ и ρ' - старая и новая плотности воды. Отсюда заключаем, что гидростатическое давление воды в цилиндрическом сосуде при ее нагревании не меняется (при условии неизменности самого сосуда):

$$p = \rho gh, \quad p' = \rho' gh' = \frac{\rho}{n} gnh = \rho gh = p$$

где p и p' - старое и новое давления столба воды в нагреваемом сосуде. Таким образом, если бы нагреваемый сосуд был цилиндрическим, давление воды в нем при нагревании не изменилось бы, поскольку уменьшение плотности воды при тепловом расширении, точно компенсируется увеличением уровня воды. Следовательно, уровень воды во втором колене не изменился бы, если бы нагреваемый сосуд был цилиндрическим.

Отсюда легко сообразить, что в сосуде, представляющем собой перевернутый конус, давление воды уменьшается при нагревании. Действительно, при нагревании воды ее плотность уменьшается так же, как и в цилиндрическом сосуде, поскольку уменьшение плотности определяется только увеличением объема воды. А вот рост высоты столба воды в расширяющемся сосуде будет, очевидно, меньшим, чем в цилиндрическом. Действительно, из-за расширения сосуда, вода поднимается в нем меньше, чем в сосуде, имеющем форму перевернутого конуса (см. рисунок). Поэтому в том сосуде, где жидкость не нагревается, ее уровень будет опускаться.



Вот рост высоты столба воды в расширяющемся сосуде будет, очевидно, меньшим, чем в цилиндрическом. Действительно, из-за расширения сосуда, вода поднимается в нем меньше, чем в сосуде, имеющем форму перевернутого конуса (см. рисунок). Поэтому в том сосуде, где жидкость не нагревается, ее уровень будет опускаться.

Если бы сосуд был сужающимся кверху, например, в форме неперевернутого конуса, то ситуация была бы обратной. При нагревании воды в коническом сосуде, ее уровень рос бы быстрее, чем убывала бы плотность. Поэтому давление воды увеличивалось бы, и уровень воды в другом колене повысился.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Вывод (явный), что изменение размеров сосуда при нагревании мало и его не надо учитывать – 1 балл
2. Рассмотрение нагревания воды в цилиндрическом сосуде - 1 балл
3. Вывод (с доказательством) об одинаковом увеличении высоты и уменьшении плотности воды в цилиндрическом сосуде – 1 балл
4. Вывод о меньшем росте высоты, чем уменьшении плотности в расширяющемся кверху сосуде – 1 балла
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Поскольку кривошип невесомый, сумма моментов всех действующих на него сил относительно шарнира равна нулю. Поэтому момент внешних сил должен уравниваться моментом силы натяжения шатуна АВ, которую можно найти из второго закона Ньютона для ползуна. Реализуем этот план.

На ползун действуют: сила тяжести, сила реакции направляющих (направленная перпендикулярно направляющим, поскольку они гладкие) и сила натяжения шатуна, которая направлена вдоль шатуна (последнее связано с тем, что поскольку шатун невесомый, суммы всех действующих на него сил и их моментов, равны нулю). Поэтому второй закон Ньютона для ползуна дает

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{N}$$

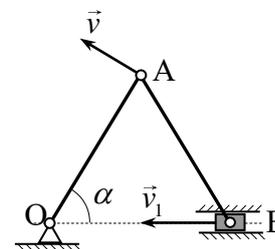
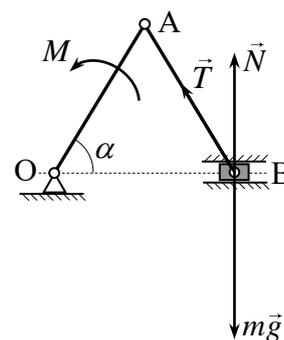
или в проекции на ось, направленную вдоль направляющих

$$ma = T \cos \alpha \quad (3)$$

(здесь использовано, что треугольник ОАВ равнобедренный). Ускорение ползуна найдем кинематически. Так как шатун нерастяжим, проекции скоростей его концов на сам шатун одинаковы. Скорость шарнира А (принадлежащего и шатуну, и вращающемуся кривошипу) направлена перпендикулярно кривошипу ОА. Поэтому проекция скорости v кривошипа на шатун равна $v \cos(2\alpha - 90^\circ) = v \sin 2\alpha$. Проекция скорости v_1 ползуна на шатун равна $v_1 \cos \alpha$. Отсюда

$$v \sin 2\alpha = v_1 \cos \alpha$$

В результате находим скорость ползуна в тот момент времени, когда угол между шатуном и горизонтом равен α



$$v_1 = 2v \sin \alpha = 2\omega l \sin \alpha .$$

Ускорение ползуна a найдем, дифференцируя предыдущую формулу по времени

$$a = \frac{dv_1}{dt} = 2\omega l \cos \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = 2\omega^2 l \cos \alpha$$

Поэтому из второго закона Ньютона (3) для шатуна получаем

$$T = 2m\omega^2 l$$

Теперь из равенства нулю суммы моментов всех сил, действующих на кривошип, получаем

$$M = Tl \sin(180^\circ - 2\alpha) = Tl \sin 2\alpha = 2m\omega^2 l^2 \sin 2\alpha$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея решения – из-за постоянства угловой скорости кривошипа сумма моментов всех сил, действующих на кривошип, относительно шарнира равна нулю – 1 балл
2. Правильно найдена скорость ползуна как функция угла между кривошипом и горизонтом - 1 балл
3. Правильно найдено ускорение ползуна как функция угла между кривошипом и горизонтом – 1 балл
4. Правильно найдена сила натяжения ползуна как функция угла между кривошипом и горизонтом – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов.

Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.

2 вариант (критерии оценки задач такие же как в варианте 1)

1. Та же задача, что и в варианте 1. 2.

$$v_B = \frac{2q_{\text{Э}}}{2q_{\text{Э}} + q_B} = 0,57, \quad v_{\text{Э}} = \frac{q_B}{2q_{\text{Э}} + q_B} = 0,43, \quad q = \frac{3q_B q_{\text{Э}}}{2q_{\text{Э}} + q_B} = 37,5$$

МДж/кг. 3. График зависимости давления от объема приведен на рисунке. Процесс незамкнутый – вторая изобара проходит через начальное состояние и продолжается дальше. 4. Та же задача, что и в варианте 1. 5. Уровень повысится. Решение см. в варианте 1. 6.

Та же задача, что и в варианте 1.

