

Решения и критерии оценивания

1. Пусть масса воды в одном стакане равна m_1 , во втором m_2 . Тогда условие равновесия рычага в первом случае дает

$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$

где l_1 и l_2 - плечи стаканов. Пусть теперь из стакана с массой воды m_1 в стакан с массой воды m_2 переливают массу воды Δm . Тогда стакан с водой массой m_2 перевесит, и для восстановления равновесия рычага его опору нужно передвинуть в направлении именно этого стакана. Следовательно, плечо этого стакана станет равным $l_2 - \Delta l$, второго стакана - $l_1 + \Delta l$. В результате условие равновесия рычага во втором случае дает

$$(m_1 - \Delta m)(l_1 + \Delta l) = (m_2 + \Delta m)(l_2 - \Delta l)$$

Из этого уравнения находим суммарную массу воды в стаканах

$$m_1 + m_2 = \frac{l_1 + l_2}{\Delta l} \Delta m = \frac{l}{\Delta l} \Delta m$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильное использование условия равновесия рычага - 1 балл
 2. Правильное условие равновесия рычага в первом случае – 1 балл
 3. Правильно понято, в каком направлении нужно сдвигать опору после переливания воды – 1 балл
 4. Правильное условие равновесия рычага во втором случае – 1 балл
 5. Правильный ответ – 1 балл
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

2. Пусть количество вещества гелия равно ν . Тогда количество вещества кислорода равно 3ν , а условие равновесия поршня в начальном состоянии дает

$$\frac{mg}{S} = p_{\kappa} - p_{\varepsilon} = \frac{3\nu RT}{V/2} - \frac{\nu RT}{V/2} = \frac{4\nu RT}{V} \quad (*)$$

где m - масса поршня, S - площадь сечения сосуда, p_{κ} и p_{ε} - давления кислорода и гелия в начальном состоянии, V - объем сосуда, T - температура газов (здесь использовано уравнение Клапейрона-Менделеева для кислорода и гелия в начальном состоянии).

После того, как гелий распространится по всему сосуду, давление газа в нижнем отсеке будет складываться из парциальных давлений кислорода и гелия, в верхнем отсеке будет только гелий, и только он и будет оказывать давление на поршень. Но поскольку гелий распределится по сосуду равномерно, его концентрация в верхнем и в нижнем отсеках будет одинакова независимо от положения поршня. А так как давление идеального газа определяется только его концентрацией и температурой, давление гелия на поршень сверху и снизу будет одинаковым. Поэтому из условия равновесия поршня в конечном состоянии гелий можно исключить, и тогда оно дает

$$\frac{mg}{S} = p'_k$$

где p'_k - парциальное давление кислорода в конечном состоянии. Поскольку для парциального давления справедлив закон Клапейрона-Менделеева, получим

$$\frac{mg}{S} = p'_k = \frac{3\nu RT}{V'} \quad (**)$$

Деля уравнения (*) и (**) друг на друга, найдем, как изменяется объем кислорода и высоту расположения поршня в сосуде в конечном состоянии

$$V' = \frac{3}{4}V \quad \Rightarrow \quad h' = \frac{3}{4}h$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильное условие равновесия поршня в начальном состоянии - 1 балл
2. Правильное использование законов Дальтона и Клапейрона-Менделеева – 1 балл
3. Обоснована возможность исключить гелий из условия равновесия поршня – 1 балл
4. Правильное условие равновесия поршня в конечном состоянии – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

3. Поскольку сопротивление амперметра меньше сопротивления вольтметра, ток через амперметр A_1 должен быть больше тока через вольтметр V_3 . Поэтому ток через мостиковый амперметр течет вверх, и, сложившись с током, текущим через вольтметр V_1 , даст больший ток через амперметр A_2 , чем через амперметр A_1 . Значит, ток $3I$ течет через амперметр A_2 , ток I - через амперметр A_1 .

Далее. Пусть через вольтметр V_2 течет ток x . Тогда легко найти токи, текущие через все электроизмерительные приборы (см. рисунок). Поскольку V_1 , A_1 и V_2 образуют замкнутый контур, напряжение на вольтметре V_1 равно сумме напряжений на вольтметре V_2 и амперметре A_1 . Поэтому из закона Ома для участка цепи имеем

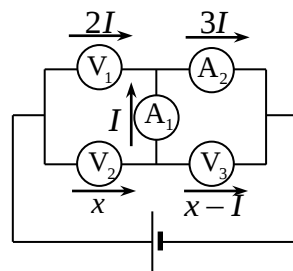
$$2IR = Ir + xR$$

где R - сопротивление вольтметра, r - сопротивление амперметра. Аналогично для замкнутого контура, образованного амперметрами A_1 и A_2 и вольтметром V_3

$$4Ir = (x - I)R$$

Если разделить каждое из уравнений на r , можно получить систему двух уравнений относительно двух неизвестных - x и $y = R/r$:

$$\begin{cases} 2yI = I + xy \\ 4I = y(x - I) \end{cases}$$



Решая эту систему, получим

$$x = \frac{9}{5}I, \quad y = \frac{R}{r} = 5$$

Отсюда находим, что токи, текущие через вольтметры V_2 и V_3 (и, следовательно, и напряжения на них) отличаются в 9/4 раза. А поскольку их сумма равна напряжению источника U_0 , то

$$U_2 = \frac{9}{13}U_0 = 1,8 \text{ В}, \quad U_3 = \frac{4}{13}U_0 = 0,8 \text{ В}$$

Показания вольтметра V_1 можно найти так. Так как сопротивление вольтметра в 5 раз больше сопротивления амперметра, а ток, текущий через вольтметр V_1 , составляет две третьих от тока, текущего через амперметр A_2 , напряжение на вольтметре V_1 в 10/3 раза больше напряжения на амперметре A_2 . А поскольку их сумма равна напряжению источника U_0 , то

$$U_1 = \frac{10}{13}U_0 = 2 \text{ В}.$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Обоснованный вывод, что ток, текущий через амперметр A_1 меньше тока, текущего через амперметр A_2 – 1 балл**
 - 2. Правильно расставлены токи в элементах цепи с учетом правила токов в узлах - 1 балл**
 - 3. Использована правильная идея расчета цепей – сумма напряжений на элементах любого замкнутого контура (с учетом направлений токов) равна нулю – 1 балл**
 - 4. Правильная система уравнений для токов и отношения сопротивлений – 1 балл**
 - 5. Правильные ответы для показаний всех вольтметров – 1 баллов**
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.**

4. Так как площади контактов между всеми отсеками сосуда одинаковы, а перегородки изготовлены из одного и того же материала и имеют одинаковую толщину, для потока тепла Q от любого более горячего отсека к любому более холодному можно написать

$$Q = k(t_x - t_y)$$

где k - одинаковый для всех отсеков коэффициент пропорциональности, t_x и t_y температуры более горячей и более холодной воды. Далее, поскольку изменение температур воды во всех отсеках гораздо меньше разности температур воды в отсеках, можно считать, что поток в рассматриваемых процессах практически не изменяется. Поэтому уравнение теплового баланса для остывания воды в горячем отсеке имеем

$$c2m\Delta t = k(t_1 - t_2) + k(t_1 - t_3) \quad (*)$$

(c - удельная теплоемкость воды, $2m$ - масса воды в самом горячем отсеке). Уравнение теплового баланса для нагревания воды в самом холодном отсеке дает

$$cm\Delta t_x = k(t_1 - t_2) + k(t_3 - t_2) \quad (**)$$

где $\Delta t_x > 0$ - увеличение температуры воды в отсеке с самой холодной водой. Здесь учтено, что масса воды в отсеке с холодной водой вдвое меньше массы воды в отсеке с горячей водой.

Отсек с водой промежуточной температуры будет получать тепло от отсека с горячей водой и отдавать тепло отсеку с холодной водой. Но поскольку (как это следует из условия)

$$t_1 - t_3 > t_3 - t_2$$

то отсек со средней температурой больше получает, чем отдает тепла, и, следовательно, вода в нем нагреется. Поэтому уравнение теплового баланса для нагрева воды в этом отсеке имеем

$$cm\Delta t_{cp} = k(t_1 - t_3) - k(t_3 - t_2) \quad (***)$$

где $\Delta t_{cp} > 0$ - увеличение температуры воды со средней температурой. Выражая коэффициент k из формулы (*) и подставляя его в формулы (**) и (***), получим

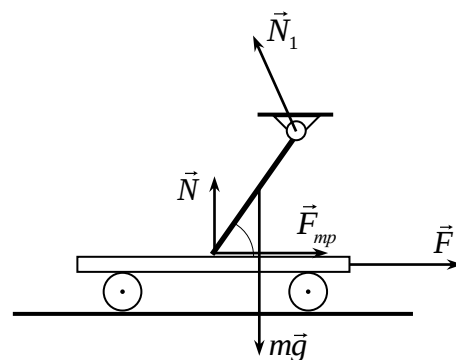
$$\Delta t_x = \frac{2(t_1 + t_3 - 2t_2)}{2t_1 - t_2 - t_3} \Delta t = 1,6^\circ\text{C}, \quad \Delta t_{cp} = \frac{2(t_1 + t_2 - 2t_3)}{2t_1 - t_2 - t_3} \Delta t = 0,4^\circ\text{C}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильное использование формул для потоков тепла между отсеками – 1 балл
2. Сделанное и обоснованное утверждение, что в формулах для потоков тепла между отсеками один и тот же коэффициент пропорциональности - 1 балл
3. Правильные уравнения теплового баланса для всех трех отсеков – 1 балл
4. Правильный ответ для увеличения температуры в отсеке с холодной водой (формула и число) – 1 балл
5. Правильный ответ для увеличения температуры в отсеке с водой средней температуры (формула и число) – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

5. Основная идея задачи заключается в том, что между стержнем и тележкой может возникнуть эффект заклинивания. Действительно, при попытке вытянуть тележку сила трения, действующая со стороны тележки на стержень, будет пытаться поставить стержень «в распор» между потолком и тележкой. Это приведет к увеличению силы реакции между стержнем и тележкой, т.е. к увеличению максимальной силы трения, которая действует со стороны тележки на стержень и со стороны



стержня на тележку. Последняя сила и не позволит вытянуть тележку, если будет возрастать с ростом F быстрее, чем F . Поэтому найдем максимальную силу трения между тележкой и стержнем (при условии, что тележка находится в покое) и исследуем ее зависимость от силы F .

Итак, рассмотрим случай малых сил F , когда тележка заведомо покоится, и найдем силу трения. На стержень действуют сила тяжести, сила реакции тележки, сила трения (которая в случае покоя тележки равна внешней силе F) и сила реакции шарнира. Условие моментов относительно шарнира дает

$$Nl \cos \alpha - mg \frac{l}{2} \cos \alpha - Fl \sin \alpha = 0$$

Откуда находим максимальную силу трения между тележкой и стержнем

$$F_{mp}^{\max} = \mu N = \mu \left(\frac{1}{2} mg + F \operatorname{tg} \alpha \right)$$

При малых значениях силы F главным слагаемым в скобках будет первое, и потому даже при небольших коэффициентах трения будет выполнено неравенство

$$F_{mp}^{\max} > F,$$

и, следовательно, тележка будет находиться в покое. При увеличении силы F максимальная сила трения будет увеличиваться, но будет и расти «сдвигающая» тележку сила F . Поэтому для ответа на вопрос о движении тележки нужно сравнить $F_{mp}^{\max}$ и F

$$F_{mp}^{\max} \vee F$$

где $\vee$ - знак сравнения (т.е. неравенство, неизвестно куда развернутое). Итак, для ответа на вопрос о покое или движении тележки нужно провести сравнение

$$\mu \left(\frac{1}{2} mg + F \operatorname{tg} \alpha \right) \vee F,$$

или

$$\frac{1}{2} \mu mg \vee F (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) \quad (*)$$

Если левая часть больше правой, тележка покоится, если меньше, движется. Подставляя сюда данные в условии значения, находим

$$\frac{1}{2} \mu mg = 10 \text{ Н}, \quad F (1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) = 16,4 \text{ Н}$$

Значит, тележка будет двигаться.

Из сравнения (*) следует, что если $1 - \mu \operatorname{tg} \alpha < 0$, левая часть сравнения будет больше правой при любых значениях силы F . Т.е. в этом случае и наступает заклинивание. Таким образом, тележка не сдвинется ни при каких значениях силы F , если

$$\mu > \operatorname{ctg} \alpha = 0,577$$

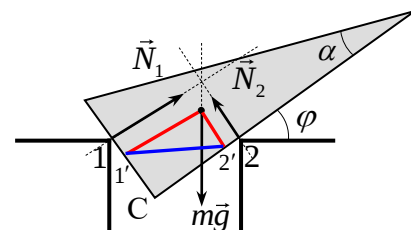
Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея решения – сравнение сдвигающей силы и максимальной силы трения покоя – 1 балл
2. Правильное выражение для максимальной силы трения покоя - 1 балл
3. Правильное сравнение сдвигающей силы и максимальной силы трения покоя – 1 балл
4. Правильный вывод о движении тележки при действии на нее сдвигающей силы, равной четверти силы тяжести стержня – 1 балл
5. Правильный ответ для коэффициента трения, при котором произойдет заклинивание – 1 балл

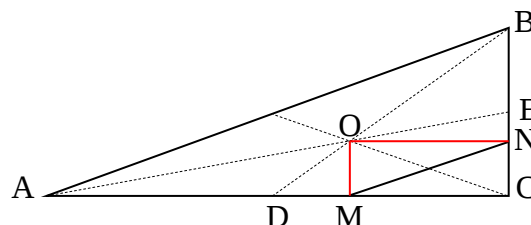
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Первый способ решения. На клин действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и две силы реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ со стороны уступов (см. рисунок), при этом силы реакции перпендикулярны соответствующим граням клина, поскольку все грани гладкие. Для клина выполнены два условия равновесия – сумма этих сил и сумма их моментов равны нулю, причем моменты можно вычислять относительно любой точки.

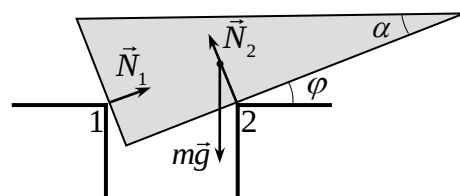
Далее. Момент силы тяжести, действующей на клин, равен нулю относительно любой точки, лежащей на вертикальной прямой, проходящей через центр тяжести клина. А так как силы реакции перпендикулярны упорам, то их суммарный момент равен нулю относительно точки пересечения двух прямых, перпендикулярных граням клина и проходящих через точки касания клина и уступов. Следовательно, точка пересечения этих прямых лежит на одной вертикальной прямой с центром тяжести клина (см. рисунок; центр тяжести клина обозначен жирной точкой).



Поскольку центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан, то если из центра тяжести прямоугольного треугольника опустить перпендикуляры на катеты и соединить получившиеся точки, то (1) получится треугольник, подобный прямоугольному треугольнику, (2) длина проведенного отрезка будет равна одной трети длины гипотенузы прямоугольного треугольника. Докажем это. Пусть в треугольнике ABC точка O является центром тяжести (точкой пересечения медиан, которые показаны тонким пунктиром на втором рисунке). Опустим из точки O перпендикуляры OM и ON на катеты (красные отрезки на втором рисунке) и соединим их основания отрезком MN. Так как BD и AE – медианы, то отрезки DC и BC равны половинами соответствующих катетов прямоугольного треугольника, а так как точка пересечения медиан делит каждую в отношении 2 к 1, считая от вершины, то отрезки MC и NC равны двум третьим частям отрезков DC и BC. Т.е. одной третьей части соответствующих катетов. Поэтому треугольник ABC подобен треугольнику MNC с коэффициентом подобия 3. Следовательно, отрезок MN параллелен основанию AB и $MN = (1/3)AB$.



Вернемся к равновесию клина. Если опустить из центра тяжести клина перпендикуляры на катеты $O1'$ и $O2'$ (см. первый рисунок решения), то отрезок $1'2'$ должен быть параллелен отрезку 12 (из подобия треугольников $12C$ и $1'2'C$). А с другой стороны он должен быть параллелен гипотенузе



клина и иметь длину, равную одной третьей части гипотенузы. А это значит, что в равновесии гипотенуза клина должна располагаться горизонтально (см. третий рисунок решения), а силы реакции должны проходить через центр тяжести клина. Отсюда следует, что в равновесии

$$\varphi = \alpha, \quad N_1 = mg \sin \alpha, \quad N_2 = mg \cos \alpha$$

Второй способ решения. Рассмотрим энергетический способ решения. Положению равновесия отвечает минимум потенциальной энергии клина, которую можно найти как mgh , где m - масса клина, h - высота расположения центра тяжести клина над некоторым произвольным уровнем. Найдем положение центра тяжести клина над уровнем уступов.

Поскольку угол $\angle 1C2$ – прямой (C – вершина прямого угла клина), то точка C в любом положении клина находится на окружности с диаметром 12 . Т.е. на окружности радиуса $l/6$ (где $l = AB$ - длина гипотенузы клина) с центром в точке K , лежащей посередине между уступами (см. рисунок). При этом $\angle K2C = \varphi$ (как вертикальный с $\angle A2Y$). Поэтому $\angle 2CX = \varphi$ (как внутренний накрест лежащий с $\angle A2Y$), и $\angle KCX = \varphi$, поскольку треугольник $KC2$ – равнобедренный. Это значит, что $\angle KCX = 2\varphi$, и вершина клина C лежит ниже уровня уступов на высоту $KC \sin(2\varphi) = (l/6) \sin(2\varphi)$.

Далее. Центр тяжести клина лежит в точке пересечения медиан. А поскольку медиана, проведенная из вершины прямого угла, составляет половину гипотенузы, а точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины, то центр тяжести клина (точка O) лежит на расстоянии $l/3$ от точки C . Так как $\angle OCX = \alpha + \varphi$ ($\angle OCA = \angle OAC$, поскольку треугольник OCA равнобедренный), то центр тяжести клина лежит выше уровня вершины C на высоту $OC \sin(\alpha + \varphi) = (l/3) \sin(\alpha + \varphi)$. Отсюда следует, что центр тяжести клина лежит выше уровня 1-2 на высоту

$$h = \frac{l}{3} \sin(\alpha + \varphi) - \frac{l}{6} \sin(2\varphi)$$

Найдем минимум этого выражения, как функции угла φ . Дифференцируя эту функцию по φ и приравнявая производную к нулю, получим

$$\cos(\alpha + \varphi) - \cos(2\varphi) = 0$$

Откуда для острого и положительного φ находим

$$\varphi = \alpha$$

Далее все как в первом способе решения.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильно расставлены силы – 1 балл

2. Доказано, что точка пересечения сил реакции лежит на одной вертикальной прямой с центром тяжести клина - 1 балл

3. Доказано, что отрезок, соединяющий основания перпендикуляров, опущенных из центра тяжести на катеты, параллелен гипотенузе и имеет длину, равную одной трети гипотенузы - 1 балл

4. Правильный ответ для угла φ – 1 балл

5. Правильный ответ для сил реакции – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Примечание. Второй способ решения (при правильной его реализации и правильном ответе) оценивается полным баллом.

Если ответ $\varphi = \alpha$ угадан без всякого обоснования (неважно, первым или вторым способом), то максимальная оценка участника за эту задачу – 2 балла.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов.

Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.