

Решения и критерии оценивания

1. Если напряжение источника положительно (т.е. источник подключен так, как это показано на рисунке в условии), диод закрыт, т.е. ток через него не течет. Не течет ток также и через вольтметр, поскольку он идеальный, т.е. имеет бесконечно большое сопротивление. Вольтметр в этом случае показывает ЭДС источника.

Если ЭДС источника больше напряжения открытия диода $\varepsilon > U_0$, диод открывается, напряжение на нем будет равно U_0 и ток будет таким, чтобы излишек напряжения $\varepsilon - U_0$ был приложен к двум резисторам. Поэтому по закону Ома для участка цепи находим силу электрического тока I , текущего в цепи

$$I = \frac{\varepsilon - U_0}{4R} \quad (*)$$

А, следовательно, напряжение на диоде и резисторе R (т.е. показания вольтметра) будет таким

$$U = U_0 + IR = U_0 + \frac{\varepsilon - U_0}{4} = \frac{\varepsilon + 3U_0}{4}$$

(при $\varepsilon = U_0$ эти два случая дают один и тот же результат). При приложении источника другой полярности диод будет закрыт, ток в цепи течь не будет, и показания вольтметра будут равны напряжению источника. Собирая все вместе, получаем для показаний вольтметра

$$U = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } 0 < \varepsilon < U_0 \\ \frac{\varepsilon + 3U_0}{4}, & \text{если } U_0 < \varepsilon \\ \varepsilon, & \text{если } \varepsilon < 0 \end{cases}$$

Поскольку при переносе заряда через диод электрическое поле совершает работу, тепло на диоде выделяется, и мощность тепловыделения равна работе, совершенной полем при переносе заряда через диод в единицу времени. Поскольку напряжение на диоде (после его открытия) равно U_0 , а за интервал времени Δt через диод переносится заряд $I\Delta t$, из формулы (*) получаем для мощности тепловыделения на диоде

$$P_\phi = U_0 I = \frac{U_0(\varepsilon - U_0)}{4R}$$

Таким образом

$$P_\phi = \begin{cases} \frac{U_0(\varepsilon - U_0)}{4R}, & \varepsilon > U_0 \\ 0, & \varepsilon < U_0 \end{cases}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Умение работать с вольтамперной характеристикой - 1 балл

2. Правильная идея решения: при $\varepsilon < U_0$ диод закрыт, при $\varepsilon > U_0$ диод открыт, напряжение на нем равно напряжению открытия, и будет течь такой ток, чтобы излишек напряжения был приложен к резисторам – 1 балл

3. Правильный ответ для случая, когда ЭДС источника меньше напряжения открытия диода (в том числе и для отрицательных ЭДС) – 1 балл

4. Правильный ответ для случая $U_0 \leq \varepsilon$ – 1 балл

5. Правильный ответ для мощности тепловыделения на диоде – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

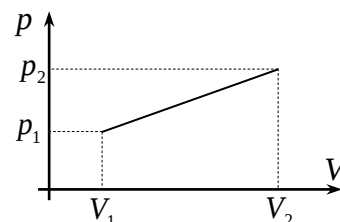
2. По первому закону термодинамики количество теплоты Q , сообщенное газу, расходуется на увеличение его внутренней энергии и совершение им работы

$$Q = \Delta U + A$$

Изменение внутренней энергии находим через изменение его температуры

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1)$$

Для нахождения работы газа разобьем перемещение поршня на малые элементы, вычислим элементарную работу газа $p_i \Delta V_i$ на каждом из них, просуммируем элементарные работы. Эту сумму можно вычислить графически, как площадь под графиком зависимости давления газа от его объема. Поскольку давление газа определяется силой



упругости пружины, а последняя линейно зависит от ее удлинения, давление газа в рассматриваемом процессе является линейной функцией объема. Поэтому работа газа равна площади трапеции с основаниями p_1 и p_2 (начальное и конечное давления газа) и высотой $V_2 - V_1$ (конечный и начальный объем, причем $V_2 = nV_1$). Имеем

$$A = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{(n-1)}{2} (p_1 V_1 + p_2 V_1) = \frac{(n-1)}{2} \left(p_1 V_1 + \frac{p_2 V_2}{n} \right)$$

Используя далее закон Клапейрона-Менделеева, получим

$$A = \frac{(n-1)}{2n} (nT_1 + T_2)$$

В результате получаем из первого закона термодинамики для количества теплоты, полученного газом в рассматриваемом процессе

$$Q = \frac{1}{2} \nu R \left[3(T_2 - T_1) + \frac{(n-1)}{n} (nT_1 + T_2) \right] = 8,86 \text{ кДж}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Использован первый закон термодинамики - - 1 балл

2. Правильно найдено изменение внутренней энергии газа – 1 балл

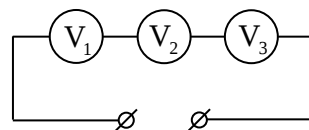
3. Сделано обоснованное утверждение, что давление является линейной функцией объема – 1 балл

4. Вычислена работа газа как площадь под графиком $p(V)$ – 1 балл

5. Правильный ответ (и формула, и число) – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

3. При последовательном соединении через вольтметры течет один и тот же ток, а каждый вольтметр показывает напряжение на себе самом. Поэтому напряжение источника равно



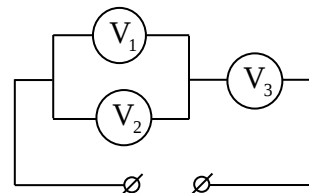
$$U = U_1 + U_2 + U_3 = 3,5 \text{ В},$$

а сопротивления второго и третьего вольтметров вдвое и вчетверо больше сопротивления первого:

$$R_1 = r, \quad R_2 = 2r, \quad R_3 = 4r$$

Соединим теперь два вольтметра параллельно, третий – последовательно первым двум, подключим к источнику, и проверим, могут ли показания одного из вольтметров не измениться (при этом не измениться могут только показания параллельно соединенных вольтметров, так как сопротивление цепи и, следовательно, ток через вольтметр, соединенный последовательно с источником, изменились).

Соединим параллельно первый и второй вольтметры, третий – им параллельно. Пусть не изменились показания первого вольтметра - $U_1 = 0,5 \text{ В}$. Тогда второй показывает такое же напряжение $U'_2 = 0,5 \text{ В}$ (он соединен с первым параллельно). А поскольку показания первого вольт-



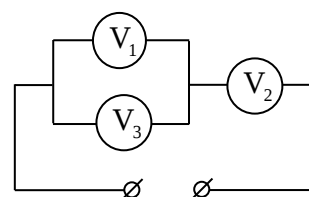
метра не изменились, через него течет тот же ток, что и в первом случае. Значит, через второй вольтметр течет половинный ток, и, следовательно, ток через третий вольтметр увеличился в $3/2$ раза по сравнению с первым случаем. Поэтому этот вольтметр будет показывать

$$U'_3 = 3 \text{ В},$$

и напряжение источника останется таким же, каким оно было в первом случае – $3,5 \text{ В}$. Значит, такая схема подключения удовлетворяет условию задачи.

Пусть в той же схеме подключения не изменились показания второго вольтметра $U_2 = 1 \text{ В}$. Тогда: (1) через него течет тот же ток, что и в первом случае, (2) показания первого вольтметра будут такими же, (3) через него течет вдвое больший ток, чем в первом случае. Отсюда следует, что ток через третий вольтметр увеличится в 3 раза по сравнению с первым случаем. Так же в 3 раза увеличатся его показания - $U'_3 = 6$, и сумма напряжений вольтметров не будет равна напряжению источника. Значит, такое соединение не удовлетворяет условию задачи.

Соединим теперь параллельно первый и третий вольтметры, второй – им последовательно. Пусть, не изменились показания первого вольтметра - $U_1 = 0,5 \text{ В}$. Тогда: (1) через него течет тот же ток, что и в первом случае, (2) такими же ($0,5 \text{ В}$) будут и показания третьего вольтметра, а ток

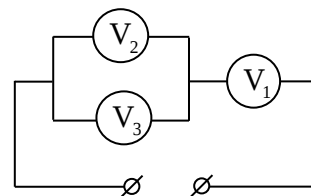


через третий вольтметр будет вчетверо меньше тока в цепи при последовательном соединении

вольтметров. Поэтому ток через второй вольтметр будет составлять $\frac{5}{4}$ тока в первой цепи, его показания будут равны 1,25 В, и сумма напряжений элементов цепи не будет равна напряжению источника – такое соединение не удовлетворяет условию.

Пусть в этом соединении не изменились показания третьего вольтметра - $U_3 = 2$ В. Тогда: (1) через него течет тот же ток, что и в первом случае, (2) такими же (2 В) будут и показания первого вольтметра, а ток через первый вольтметр будет вчетверо больше тока в цепи при последовательном соединении вольтметров. Поэтому через второй вольтметр потечет в 5 раз больший ток, чем при последовательном соединении, и напряжение на нем будет 5 В, что не удовлетворяет условию, поскольку сумма напряжений будет больше напряжения источника.

Соединим теперь параллельно второй и третий вольтметры, первый – им последовательно. Пусть, не изменились показания второго вольтметра - $U_2 = 1$ В. Тогда: (1) через него течет тот же ток, что и в первом случае, (2) такими же (1 В) будут и показания третьего вольтметра, а ток через третий вольтметр будет вдвое меньше тока в цепи при последовательном соединении вольтметров. Поэтому ток через первый вольтметр будет составлять $\frac{3}{2}$ тока в первой цепи, его показания будут равны 0,75 В, и сумма напряжений элементов цепи не будет равна напряжению источника – такое соединение не удовлетворяет условию.



Пусть в этом соединении не изменились показания третьего вольтметра - $U_3 = 2$ В. Тогда: (1) через него течет тот же ток, что и в первом случае, (2) такими же (2 В) будут и показания второго вольтметра, а ток через второй вольтметр будет вдвое больше тока в цепи при последовательном соединении вольтметров. Поэтому через первый вольтметр потечет в 3 раза больший ток, чем при последовательном соединении, и напряжение на нем будет 1,5 В. И это удовлетворяет условию, поскольку сумма напряжений на элементах цепи равна напряжению источника.

Ответ. Условию удовлетворяют 2 соединения. (1) параллельно соединены первый и второй вольтметры, им последовательно третий. Показания первого вольтметра не меняются - $U'_1 = 0,5$ В, $U'_2 = 0,5$ В, $U'_3 = 3$ В. (2) параллельно соединены второй и третий вольтметр, им последовательно – третий. Показания третьего вольтметра не меняются $U'_3 = 2$ В, $U'_2 = 2$ В, $U'_1 = 1,5$ В.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильное соотношение между сопротивлениями вольтметров – 1 балл
2. Правильное использование правил последовательного и параллельного соединения Элементов цепи - 1 балл
3. Правильное утверждение, что не изменится могут только показания параллельно соединенных вольтметров – 1 балл
4. Правильный один ответ – 1 балл
5. Правильный второй ответ – 1 балл.

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

4. Так как площади контактов между всеми отсеками сосуда одинаковы, а перегородки изготовлены из одного и того же материала и имеют одинаковую толщину, для потока тепла Q от любого более горячего отсека к любому более холодному можно написать

$$Q = k(t_x - t_y)$$

где k - одинаковый для всех отсеков коэффициент пропорциональности, t_x и t_y температуры более горячей и более холодной воды. Далее, поскольку изменение температур воды во всех отсеках гораздо меньше разности температур воды в отсеках, можно считать, что поток в рассматриваемых процессах практически не изменяется. Поэтому уравнение теплового баланса для остывания воды в горячем отсеке имеем

$$c2m\Delta t = k(t_1 - t_2) + k(t_1 - t_3) \quad (*)$$

(c - удельная теплоемкость воды, $2m$ - масса воды в самом горячем отсеке). Уравнение теплового баланса для нагревания воды в самом холодном отсеке дает

$$cm\Delta t_x = k(t_1 - t_2) + k(t_3 - t_2) \quad (**)$$

где $\Delta t_x > 0$ - увеличение температуры воды в отсеке с самой холодной водой. Здесь учтено, что масса воды в отсеке с холодной водой вдвое меньше массы воды в отсеке с горячей водой.

Отсек с водой промежуточной температуры будет получать тепло от отсека с горячей водой и отдавать тепло отсеку с холодной водой. Но поскольку (как это следует из условия)

$$t_1 - t_3 > t_3 - t_2$$

то отсек со средней температурой больше получает, чем отдает тепла, и, следовательно, вода в нем нагреется. Поэтому уравнение теплового баланса для нагрева воды в этом отсеке имеем

$$cm\Delta t_{cp} = k(t_1 - t_3) - k(t_3 - t_2) \quad (***)$$

где $\Delta t_{cp} > 0$ - увеличение температуры воды со средней температурой. Выражая коэффициент k из формулы (*) и подставляя его в формулы (**) и (***), получим

$$\Delta t_x = \frac{2(t_1 + t_3 - 2t_2)}{2t_1 - t_2 - t_3} \Delta t = 1,6^\circ\text{C}, \quad \Delta t_{cp} = \frac{2(t_1 + t_2 - 2t_3)}{2t_1 - t_2 - t_3} \Delta t = 0,4^\circ\text{C}$$

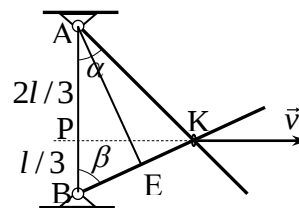
Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильное использование формул для потоков тепла между отсеками – 1 балл
2. Сделанное и обоснованное утверждение, что в формулах для потоков тепла между отсеками один и тот же коэффициент пропорциональности - 1 балл
3. Правильные уравнения теплового баланса для всех трех отсеков – 1 балл
4. Правильный ответ для увеличения температуры в отсеке с холодной водой (формула и число) – 1 балл
5. Правильный ответ для увеличения температуры в отсеке с водой средней температуры (формула и число) – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

5. Пусть в момент времени, который мы условно выберем за начальный, колечко располагалось в точке Р, а потом начало двигаться с постоянной скоростью v вдоль горизонтальной прямой РК. Тогда $PK = vt$, и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3vt}{2l}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{3vt}{l}$$



Угловые скорости стержней найдем, дифференцируя эти формулы по времени и учитывая, что

$$\omega_{AM} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \omega_{BN} = \frac{d\beta}{dt}.$$

Имеем

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{3v}{2l}, \quad \frac{1}{\cos^2 \beta} \frac{d\beta}{dt} = \frac{3v}{l}$$

Или

$$\omega_{AM} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{3v}{2l} \cos^2 \alpha, \quad \omega_{BN} = \frac{d\beta}{dt} = \frac{3v}{l} \cos^2 \beta$$

Эти угловые скорости зависят от времени, поскольку зависят от времени $\cos^2 \alpha$ и $\cos^2 \beta$. Найдем их в тот момент, когда $AK = l$. Из рисунка видно, что в этот момент времени

$$\cos \alpha = \frac{2l/3}{l} = \frac{2}{3}.$$

Косинус угла β найти немного сложнее. Опустим перпендикуляр из вершины А треугольника АВК на сторону ВК. Так как треугольник ВАК в рассматриваемый момент равнобедренный, то $BE=BK$. Пусть $BK = x$. Тогда из подобия треугольников АВЕ и ВРК имеем

$$\frac{PB}{BE} = \frac{BK}{AB} \Rightarrow \frac{l/3}{x/2} = \frac{x}{l} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}l$$

Отсюда находим

$$\cos \beta = \frac{PB}{BK} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

В результате для угловых скоростей стержней в рассматриваемый момент имеем

$$\omega_{AM} = \frac{2v}{3l}, \quad \omega_{BN} = \frac{v}{2l}$$

Те же ответы можно получить и без дифференцирования, рассматривая малое перемещение колечка и находя углы поворота стержней.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильные выражения для углов α и β в зависимости от времени – 1 балл
2. Правильно найдены тригонометрические функции углов α и β в рассматриваемый момент времени - 1 балл
3. Правильные выражения для угловых скоростей стержней (через производные найденных функций) – 1 балл (или - при решении через малые приращения углов – правильно найдены малые углы поворота стержней при малом перемещении колечка)

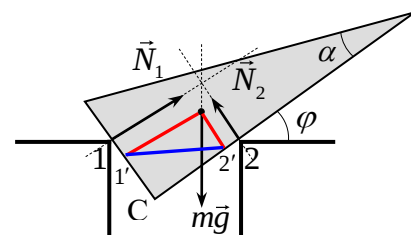
4. Правильный ответ для ω_{AM} – 1 балла

5. Правильный ответ для ω_{BN} – 1 балл

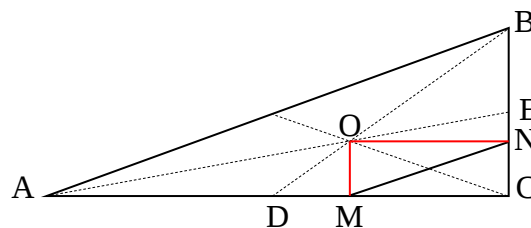
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Первый способ решения. На клин действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и две силы реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ со стороны уступов (см. рисунок), при этом силы реакции перпендикулярны соответствующим граням клина, поскольку все грани гладкие. Для клина выполнены два условия равновесия – сумма этих сил и сумма их моментов равны нулю, причем моменты можно вычислять относительно любой точки.

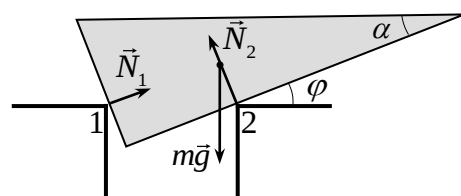
Далее. Момент силы тяжести, действующей на клин, равен нулю относительно любой точки, лежащей на вертикальной прямой, проходящей через центр тяжести клина. А так как силы реакции перпендикулярны упорам, то их суммарный момент равен нулю относительно точки пересечения двух прямых, перпендикулярных граням клина и проходящих через точки касания клина и уступов. Следовательно, точка пересечения этих прямых лежит на одной вертикальной прямой с центром тяжести клина (см. рисунок; центр тяжести клина обозначен жирной точкой).



Поскольку центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан, то если из центра тяжести прямоугольного треугольника опустить перпендикуляры на катеты и соединить получившиеся точки, то (1) получится треугольник, подобный прямоугольному треугольнику, (2) длина проведенного отрезка будет равна одной трети длины гипотенузы прямоугольного треугольника. Докажем это. Пусть в треугольнике ABC точка O является центром тяжести (точкой пересечения медиан, которые показаны тонким пунктиром на втором рисунке). Опустим из точки O перпендикуляры OM и ON на катеты (красные отрезки на втором рисунке) и соединим их основания отрезком MN. Так как BD и AE – медианы, то отрезки DC и BC равны половинами соответствующих катетов прямоугольного треугольника, а так как точка пересечения медиан делит каждую в отношении 2 к 1, считая от вершины, то отрезки MC и NC равны двум третьим частям отрезков DC и BC. Т.е. одной третьей части соответствующих катетов. Поэтому треугольник ABC подобен треугольнику MNC с коэффициентом подобия 3. Следовательно, отрезок MN параллелен основанию AB и $MN = (1/3)AB$.



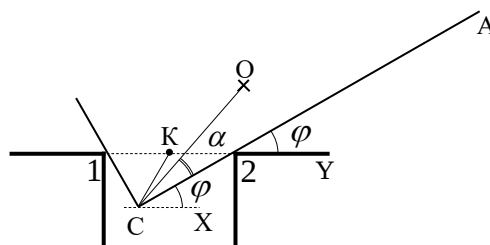
Вернемся к равновесию клина. Если опустить из центра тяжести клина перпендикуляры на катеты $O1'$ и $O2'$ (см. первый рисунок решения), то отрезок $1'2'$ должен быть параллелен отрезку 12 (из подобия треугольников $12C$ и $1'2'C$).



А с другой стороны он должен быть параллелен гипотенузе клина и иметь длину, равную одной третьей части гипотенузы. А это значит, что в равновесии гипотенуза клина должна располагаться горизонтально (см. третий рисунок решения), а силы реакции должны проходить через центр тяжести клина. Отсюда следует, что в равновесии

$$\varphi = \alpha, \quad N_1 = mg \sin \alpha, \quad N_2 = mg \cos \alpha$$

Второй способ решения. Рассмотрим энергетический способ решения. Положению равновесия отвечает минимум потенциальной энергии клина, которую можно найти как mgh , где m - масса клина, h - высота расположения центра тяжести клина показан крестиком на рисунке и обозначен как О) над некоторым произвольным уровнем. Найдем положение центра тяжести клина над уровнем уступов.



Поскольку угол $\angle 1C2$ – прямой (C – вершина прямого угла клина), то точка C в любом положении клина находится на окружности с диаметром 12 . Т.е. на окружности радиуса $l/6$ (где $l = AB$ - длина гипотенузы клина) с центром в точке K , лежащей посередине между уступами (см. рисунок). При этом $\angle K2C = \varphi$ (как вертикальный с $\angle A2Y$). Поэтому $\angle 2CX = \varphi$ (как внутренний накрест лежащий с $\angle K2C$), и $\angle KCA = \varphi$, поскольку треугольник $KC2$ – равнобедренный. Это значит, что $\angle KCX = 2\varphi$, и вершина клина C лежит ниже уровня уступов на высоту $KC \sin(2\varphi) = (l/6) \sin(2\varphi)$

Далее. Центр тяжести клина лежит в точке пересечения медиан. А поскольку медиана, проведенная из вершины прямого угла, составляет половину гипотенузы, а точка пересечения медиан делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины, то центр тяжести клина (точка O) лежит на расстоянии $l/3$ от точки C . Так как $\angle OCX = \alpha + \varphi$ ($\angle OCA = \angle OAC$, поскольку треугольник OCA равнобедренный), то центр тяжести клина лежит выше уровня вершины C на высоту $OC \sin(\alpha + \varphi) = (l/3) \sin(\alpha + \varphi)$. Отсюда следует, что центр тяжести клина лежит выше уровня 1-2 на высоту

$$h = \frac{l}{3} \sin(\alpha + \varphi) - \frac{l}{6} \sin(2\varphi)$$

Найдем минимум этого выражения, как функции угла φ . Дифференцируя эту функцию по φ и приравнявая производную к нулю, получим

$$\cos(\alpha + \varphi) - \cos(2\varphi) = 0$$

Откуда для острого и положительного φ находим

$$\varphi = \alpha$$

Далее все как в первом способе решения.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильно расставлены силы – 1 балл
2. Доказано, что точка пересечения сил реакции лежит на одной вертикальной прямой с центром тяжести клина - 1 балл
3. Доказано, что отрезок, соединяющий основания перпендикуляров, опущенных из центра тяжести на катеты, параллелен гипотенузе и имеет длину, равную одной трети гипотенузы - 1 балл
4. Правильный ответ для угла φ – 1 балл
5. Правильный ответ для сил реакции – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Примечание. Второй способ решения (при правильной его реализации и правильном ответе) оценивается полным баллом.

Если ответ $\varphi = \alpha$ угадан без всякого обоснования (неважно, первым или вторым способом), то максимальная оценка участника за эту задачу не может быть более 2 баллов.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов.

Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.