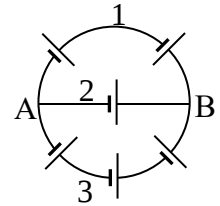


**Задания, решения и критерии оценки работ очного отборочного тура
Инженерной олимпиады школьников
11 класс, 2024-2025 учебный год**

1 вариант

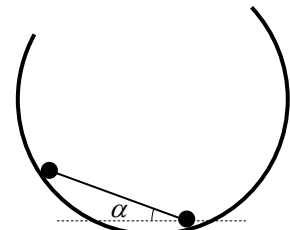
1. Шесть одинаковых источников ЭДС ε с внутренним сопротивлением r соединены в электрическую цепь так, как показано на рисунке. Найти силу электрического тока, текущего на участках 1, 2 и 3. В каком направлении – от А к В или от В к А – текут эти токи?



2. В стакане находится раствор соли с некоторой неизвестной концентрацией C . Из стакана забирают третью часть раствора и выпаривают его до тех пор, пока концентрация соли не повысится в два раза. После этого выпаренный раствор возвращают обратно в стакан. В результате концентрация соли в стакане становится равной $C + 0,1$. Определить исходную концентрацию C соли в стакане. Считать, что в воде может раствориться любое количество соли.

3. Электромотор питается от аккумуляторной батареи с ЭДС $\varepsilon = 12$ В. При полном затормаживании ротора (вращающейся части) электромотора в цепи течет ток силой $I = 5$ А. Найти механическую мощность электромотора при токе в его обмотке $I_1 = 2$ А.

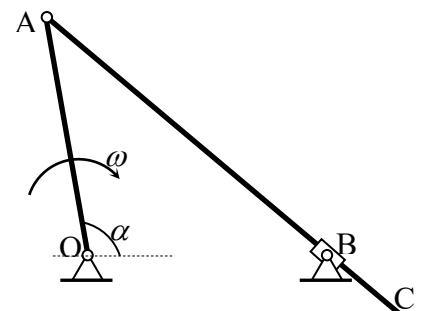
4. Внутри абсолютно гладкой сферы радиуса R находятся два маленьких тела с массами m и $2m$, связанными жестким невесомым стержнем с длиной, равной радиусу сферы. Тела находятся в равновесии. Определить угол α между стержнем и горизонталью (см. рисунок).



5. В цилиндрической теплоизолированной трубе, наполненной водой, сделаны две перегородки из одинакового пенопласта, перпендикулярные оси трубы, толщина которых отличается вдвое (см. рисунок). Известно, что если бы температура воды слева и справа от более тонкой перегородки отличалась на $\Delta t = 1^\circ$, поток тепла через эту перегородку составил бы $q = 0,01$ Дж/с. Какой будет установившаяся температура воды в полости между перегородками, если справа от толстой перегородки поддерживать температуру $t_1 = 80^\circ \text{C}$, а слева от тонкой - $t_2 = 10^\circ \text{C}$. Какое количество теплоты в единицу времени нужно выделять в горячей воде и удалять из холодной воды, чтобы поддерживать такое равновесие? **Указание.** Количество тепла q , переносимого в единицу времени через единицу площади тонкого слоя толщиной Δx , одна поверхность которого поддерживается при температуре t_1 , вторая – при температуре t_2 , определяется законом:

$q = \lambda(t_2 - t_1)/\Delta x$, где коэффициент λ определяется свойствами вещества (закон Фурье).

6. Кривошипно-кулисный механизм представляет собой стержень ОА длиной $l = 1$ м, который может вращаться вокруг точки О (этот стержень называется «кривошип»), и шарнирно связанный с ним стержень ОС, который может свободно двигаться в маленькой поворотной втулке В (этот стержень называется «кулиса»). Известно, что расстояние $OA = OB$. Кривошип вращается с постоян-



ной угловой скоростью $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$. Найти величину и направление вектора мгновенного ускорения той точки кулисы, которая находится внутри втулки С, когда $\alpha = 120^\circ$.

Решения и критерии оценивания

1. Пусть по трём участкам цепи А1В, А2В и А3В от А к В текут электрические токи I_1 , I_2 и I_3 соответственно (если какой-то из токов получится отрицательным, это будет означать, что ток течет в противоположном направлении). Для электрического напряжения между точками В и А имеем, используя закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС:

$$\text{для участка А1В: } U = 2\varepsilon - I_1 2r$$

$$\text{для участка А2В: } U = \varepsilon - I_2 r$$

$$\text{для участка А3В: } U = 3\varepsilon - I_3 3r$$

И для трёх токов, втекающих в вершину В: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. Эти равенства сводятся к такой системе уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon = I_1 2r - I_2 r \\ \varepsilon = I_3 3r - I_1 2r \\ I_1 + I_2 + I_3 = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдем

$$I_1 = \frac{2\varepsilon}{11r}, \quad I_2 = -\frac{7\varepsilon}{11r}, \quad I_3 = \frac{5\varepsilon}{11r}$$

Таким образом, по участкам 1 и 3 ток течет от А к В, а по участку 2 – от В к А.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильное использование закона Ома для участка цепи, содержащего ЭДС – 1 балл

2. Правильная система уравнений для токов – 1 балл

3. Правильный ток I_1 (величина и направление) – 1 балл

4. Правильный ток I_2 (величина и направление) – 1 балл

5. Правильный ток I_3 (величина и направление) – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

2. Пусть масса раствора в стакане m , исходное процентное содержание соли – C . Из стакана взяли $m/3$ раствора и увеличили концентрацию соли в нем вдвое. А поскольку выпаривалась только вода, для удвоения концентрации этой порции раствора нужно сделать ее общую массу вдвое меньшей. Поэтому новая общая масса раствора после выпаривания стала равна

$$m = \frac{1}{3}m + \frac{2}{3}m \quad \rightarrow \quad m_1 = \frac{1}{3}m \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3}m = \frac{5}{6}m$$

При этом масса соли в растворе не изменилась. Как она была до выпаривания равна Cm , так и осталась после. Поэтому новая концентрация соли в стакане равна

$$C + 0,1 = \frac{Cm}{(5m/6)} = \frac{6C}{5}$$

Решая это уравнение, найдем

$$C = 0,5$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Использование правильного определения концентрации раствора – 1 балл

- 2. Правильное нахождение массы воды в выпаренном растворе – 1 балл
- 3. Правильный вывод, что масса соли в растворе не изменилась – 1 балл
- 3. Правильное уравнение для новой концентрации раствора – 1 балл
- 5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

3. Если механическая работа не совершается (в случае затормаживания якоря), то из закона Ома для замкнутой цепи имеем:

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

где R - полное сопротивление цепи. Отсюда

$$R = \frac{\varepsilon}{I}.$$

В случае работающего электромотора работа источника εI_1 (в единицу времени) тратится на нагревание проводов и механическую работу. Поэтому

$$\varepsilon I_1 = I_1^2 R + P_{\text{мех}}$$

где $P_{\text{мех}}$ - механическая мощность электромотора. Отсюда получаем

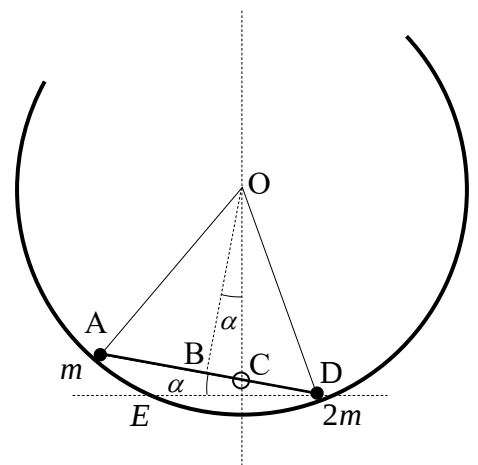
$$P_{\text{мех}} = \frac{\varepsilon I_1 (I - I_1)}{I} = 14,4 \text{ Вт}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Правильно найдено сопротивление цепи – 1 балл
- 2. Правильные формулы для работы источника и мощности теплотерьер в цепи - 1 балл
- 3. Правильный закон сохранения энергии – 1 балл
- 4. Правильно найдена механическая мощность мотора (формула) – 1 балл
- 5. Правильно найдена мощность мотора (число) – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

4. Рассмотрим условие равновесия системы, состоящей из двух шариков и стержня. Сумма внешних сил, действующих на систему, и их моментов равна нулю относительно любой оси. Внешними для системы являются сила тяжести $3m\vec{g}$, приложенная к ее центру тяжести, и две силы реакции, действующие на шарики перпендикулярно поверхности сферы, поскольку трения нет. А поскольку силы реакции действуют по прямым, проходящим через центр сферы, то из условия равенства нулю суммы моментов относительно центра сферы следует, что момент силы тяжести, действующей на систему, относительно центра сферы равен нулю. Это значит, что центр тяжести системы находится под центром сферы. А поскольку центр тяжести находится ближе к более массивному телу, то оно находится ближе к вертикальной прямой, проходящей через центр сферы. Поэтому тело с массой $2m$ находится ниже, тело с массой m - выше (см. рисунок), а центр тяжести системы (отмечен кружком на рисунке) находится на одной вертикали с центром сферы.



Так как центр тяжести системы тел делит стержень в отношении 2:1, и длина стержня равна радиусу сферы, то

$$AC = \frac{2}{3}R, \quad CD = \frac{1}{3}R$$

Поскольку треугольник OAD равносторонний, то перпендикуляр, опущенный из его вершины O на противоположную сторону, делит ее пополам, и потому

$$BC = \frac{R}{2} - BD = \frac{R}{6}$$

и

$$\angle BOC = \angle ADE$$

(как углы со взаимно перпендикулярными сторонами), т.е. $\angle BOC = \alpha$. Поэтому из треугольника OBC находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{R/6}{\sqrt{3}R/2} = \frac{\sqrt{3}}{9} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{9} \right) = 10,9^\circ$$

Другие тригонометрические функции угла α :

$$\cos \alpha = \frac{9}{2\sqrt{21}} = \frac{9\sqrt{21}}{42}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Понято и обосновано (со ссылкой на уравнение моментов), что более тяжелый шарик находится ниже - 1 балл
2. Обосновано, что центр тяжести системы лежит на одной вертикали с центром – 1 балл
3. Правильно найдено положение центра тяжести (делит стержень в отношении 2:1 – 1 балл
4. Правильное геометрическое рассмотрение стержня (или так, как в приведенном решении, или как-то по-другому) – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

5. В тепловом равновесии внутри полости установится такая температура t_x , что поток тепла в полость от более горячей воды и поток тепла из полости в более холодную воду будут быть одинаковы. Потоки тепла находим по закону Фурье (см. указание к условию)

$$\text{от горячей воду к полости } q = \lambda \frac{(t_1 - t_x)S}{2\Delta x}$$

$$\text{от полости к холодной воде } q = \lambda \frac{(t_x - t_2)S}{\Delta x}$$

(S - площадь сечения трубы, λ - теплопроводность пенопласта, Δx и $2\Delta x$ - толщины тонкой и толстой перегородок). Приравнивая эти два потока, получим

$$t_1 - t_x = 2(t_x - t_2),$$

откуда находим

$$t_x = \frac{1}{3}(t_1 + 2t_2) = 33,3^\circ \text{C}$$

Чтобы такое равновесие поддерживать в горячей воде нужно в единицу времени выделять такое количество теплоты, которое передается в полость (а из холодной воды это количество нужно удалять). Т.е. мощность тепловыделения равна

$$P = \lambda \frac{(t_1 - t_x) S}{2\Delta x}$$

С другой стороны, условие задачи дает нам информацию о коэффициенте теплопроводности, площади сечения и толщине перегородок. Если бы разность температур слева и справа от тонкой перегородки составляла $\Delta t = 1^\circ \text{C}$, то поток тепла равнялся бы q . Поэтому из закона Фурье имеем

$$q = \lambda \frac{\Delta t S}{\Delta x}$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{q \Delta x}{S \Delta t}$$

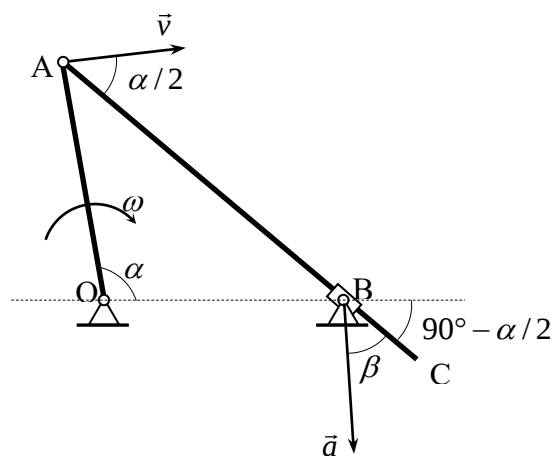
Подставляя эту формулу в мощность тепловыделения в горячей воде, получим

$$P = q \frac{(t_1 - t_2)}{3\Delta t} = 0,23 \text{ Вт}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея нахождения равновесного состояния – поток тепла от горячей воды в полость и от полости к холодной воде одинаковы - 1 балл
 2. Правильное уравнение для нахождения равновесной температуры – 1 балл
 3. Правильно найдена равновесная температура в полости (и формула, и число) – 1 балл
 4. Правильная идея нахождения мощности тепловыделения (и теплостока) – количество выделенного (и удаленного) тепла равно тепловому потоку в полость и из полости – 1 балл
 5. Правильно найдена мощность тепловыделения (и теплостока) – 1 балл
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Поскольку точка А принадлежит кривошипу, ее скорость в любой момент направлена перпендикулярно кривошипу (см. рисунок) и равна по величине $v = \omega l$, а угол между этим вектором и стержнем в тот момент времени, когда угол между кривошипом и горизонтом равен α , равен $\alpha/2$. Точка кривошипа, которая находится внутри втулки, может двигаться только вдоль втулки, т.е. вдоль стержня. Из условия нерастяжимости стержня (проекции скоростей всех его точек на сам стержень должны быть равны) получаем для скорости v_1 точки стержня, которая находится внутри втулки



$$v_1 = v \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \omega l \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

С изменением угла поворота кривошипа ОА величина этой скорости меняется, что приводит к появлению составляющей ускорения, параллельной скорости a_τ . Величину этой составляющей найдем, дифференцируя v_1 по времени

$$a_\tau = \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{2} \omega^2 l \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Кроме того, из-за поворота кулисы АС скорость точки кулисы, находящейся внутри втулки, меняется по направлению, что приводит к появлению составляющей ускорения, перпендикулярной скорости a_n . Чтобы найти величину этой составляющей заметим, что угол между кулисой и горизонтальной прямой, проходящей через втулку, составляет $90^\circ - (\alpha/2)$ (см. рисунок), И потому при повороте кривошипа за малое время Δt на угол $\Delta\alpha$ изменяется на угол $\Delta\alpha/2$. Поэтому изменение скорости, перпендикулярное самой скорости, в тот момент времени, когда угол между кривошипом и горизонталью (см. рисунок) равен α за малое время Δt , есть

$$\Delta v_n = v_1 \frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{1}{2} \omega l \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Delta\alpha$$

Деля это выражение на Δt и учитывая, что $\Delta\alpha / \Delta t = \omega$, найдем a_n

$$a_n = \frac{1}{2} \omega^2 l \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Из этих формул следует, что модуль вектора ускорения рассматриваемой точки кулисы не зависит от угла наклона кулисы, поскольку

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \frac{1}{2} \omega^2 l$$

А направлен вектор ускорения этой точки под таким углом β к кулисе, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_n}{a_\tau} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Правильно найдена скорость рассматриваемой точки - 1 балл**
 - 2. Правильно найдена тангенциальная составляющая ускорения рассматриваемой точки – 1 балл**
 - 3. Правильно найдена составляющая изменения скорости рассматриваемой точки, перпендикулярная самой скорости – 1 балл**
 - 4. Правильно найдена величина ускорения рассматриваемой точки – 1 балл**
 - 5. Правильно найдено направление вектора ускорения рассматриваемой точки – 1 балл**
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.**

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.