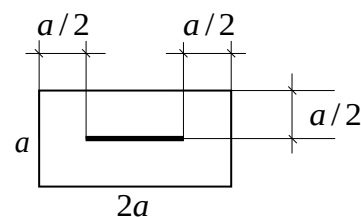


Решения и критерии оценивания

1. Чтобы вся пластина была охвачена огнем, огонь должен прийти от сторон пластины до точек наиболее удаленных от сторон пластины. Для прямоугольной пластинки со сторонами a и $2a$ это точки, лежащие посередине пластины на расстоянии $a/2$ от сторон (см. рисунок; точки наиболее удаленные от сторон, показаны жирной прямой).



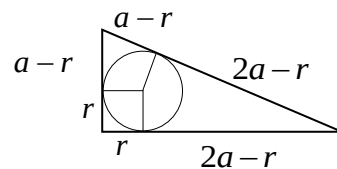
Из рисунка видим, что огонь должен пройти расстояние $a/2$. Поэтому скорость распространения огня по материалу пластинки равна

$$v = \frac{a}{2t}$$

А для того, чтобы пластинка в форме прямоугольного треугольника, подожженная одновременно со всех сторон, была полностью охвачена огнем, нужно чтобы огонь дошел до точки, максимально удаленной от сторон треугольника. А это - центр вписанной окружности, и огонь дойдет до этой точки через время

$$t_1 = \frac{r}{v} = \frac{2rt}{a} \quad (*)$$

где r - радиус вписанной окружности. Радиус вписанной в треугольник окружности найдем из следующих геометрических соображений. Проведем из центра вписанной окружности радиусы в точки касания окружностью катетов и гипотенузы. Тогда, поскольку катеты и гипотенуза являются касательными к вписанной



окружности, то очевидно, что расстояния от точек касания окружностью катетов до вершины прямого угла равны r (см. рисунок). Поэтому расстояния от этих точек до вершин острых углов равны $a-r$ и $2a-r$ (см. рисунок). С другой стороны, эти расстояния равны расстояниям от вершин острых углов до точки касания вписанной окружностью гипотенузы (см. рисунок). Поэтому

$$c = a - r + 2a - r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3a - c}{2} = \frac{(3 - \sqrt{5})}{2}a$$

где $c = \sqrt{5}a$ - гипотенуза треугольника. В результате из формулы (*) получаем

$$t_1 = (3 - \sqrt{5})t$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея решения – найти скорость распространения огня из данных по прямоугольной пластинке, а затем использовать их для пластинки в форме прямоугольного треугольника - 1 балл
2. Правильно найдена скорость распространения огня – 1 балл
3. Правильное утверждение, что пластинка в форме треугольника будет полностью охвачена огнем, когда огонь дойдет до центра вписанной окружности – 1 балл
4. Правильно найден радиус вписанной окружности и обосновано его нахождение – 1 балл

5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

2. Поскольку радиус пузырька равен r , то на разрезе будут видны те пузырьки, центры которых находятся не далее чем на расстоянии r от плоскости разреза. Т.е. те пузырьки, центры которых попали в параллелепипед с размерами сторон $2r \times b \times c$. А поскольку в параллелепипед объемом $V = abc$ попадают N пузырьков, то в параллелепипед объемом $V_1 = 2rbc$ попадут центры такого количества пузырьков

$$N_1 = \frac{N}{abc} 2rbc = \frac{2r}{a} N = 103,8$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильное понимание того, что количество пузырьков, попавших в некоторый объем, пропорционально этому объему – 1 балл

2. Правильно найдено количество пузырьков в единице объема - 1 балл

3. Правильное утверждение, что на разрезе будут видны те пузырьки, центры которых лежат не далее, чем на расстоянии r от разреза – 1 балл

4. Правильный ответ (формула) – 1 балл

5. Правильный ответ (число) – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Комментарий. Если нет доказательства того, что в конце не может быть смеси воды и льда или только льда, максимальная оценка за задачу – 3 балла.

3. Так как заранее нельзя сказать, каким будет конечное состояние воды в сосуде (лед, вода, пар или их смеси) посчитаем все необходимые количества теплоты.

А. Если водяной пар полностью конденсируется, выделится количество теплоты

$$Q_1 = rm_2 = 1,15 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

Б. Чтобы лед нагрелся до температуры плавления, нужно количество теплоты

$$Q_2 = c_{\text{л}} m_1 (0^\circ\text{C} - t_1) = 210 \text{ Дж.}$$

Поскольку $Q_2 < Q_1$, лед нагреется до температуры плавления $t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C}$

В. Чтобы лед превратился в воду при температуре $t_{\text{пл}} = 0^\circ\text{C}$, нужно количество теплоты

$$Q_3 = \lambda m_1 = 3,3 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

Поскольку $Q_2 + Q_3 < Q_1$ лед полностью расплавится и превратится в воду.

Г. Чтобы довести всю получившуюся при таянии льда воду до температуры кипения нужно

$$Q_4 = c_{\text{в}} m_1 (100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}) = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж.}$$

Поскольку $Q_2 + Q_3 + Q_4 < Q_1$, то вся получившаяся вода дойдет до температуры кипения. Поэтому в конечном состоянии будет водяной пар и вода, причём сконденсируется столько водяного пара, чтобы выделившееся при его конденсации количество теплоты было равно $Q_2 + Q_3 + Q_4$. Таким образом

$$rm_x = Q_2 + Q_3 + Q_4 \Rightarrow m_x = \frac{Q_2 + Q_3 + Q_4}{r} = \frac{c_d m_1 (t_n - t_1) + \lambda m_1 + c_e m_1 (t_k - t_n)}{r} = 3,4 \text{ г}$$

Это значит, что в сосуде будет находиться

$$m = m_1 + m_x = m_1 + \frac{c_d m_1 (t_n - t_1) + \lambda m_1 + c_e m_1 (t_k - t_n)}{r} = 13,3 \text{ г.}$$

воды и 1,7 г водяного пара при температуре кипения $t_k = 100^\circ\text{C}$.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Утверждение, что нужно проводить анализ конечного состояния – 1 балл
2. Правильное найдено количество теплоты, выделяющееся при полной конденсации пара – 1 балл
3. Правильно найдены количества теплоты, необходимые для нагревания льда, плавления льда, нагревания получившейся воды до температуры кипения – 1 балл
4. Правильный вывод, что в конечном состоянии будет вода и водяной пар при температуре кипения – 1 балл
5. Правильный ответ для массы воды в сосуде – 1 балл.

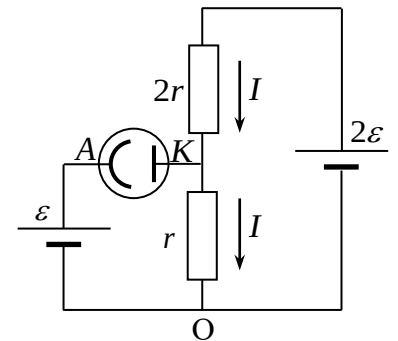
Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

4. Предположим, что ток через фотоэлемент не течет, найдем напряжение на нем и проверим, будет ли выполняться условие $\varphi_A < \varphi_K$.

Если да, то наше предположение было правильным.

Если через фотоэлемент не течет ток, ток, текущий через резисторы $2r$ и r одинаков и равен

$$I = \frac{2\varepsilon}{3r}.$$



Поэтому падение напряжение на резисторе r равно $2\varepsilon/3$, и, следовательно, потенциал точки К равен

$$\varphi_K = \varphi_O + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

А поскольку напряжение на левом источнике равно ε , потенциал точки А равен

$$\varphi_A = \varphi_O + \varepsilon.$$

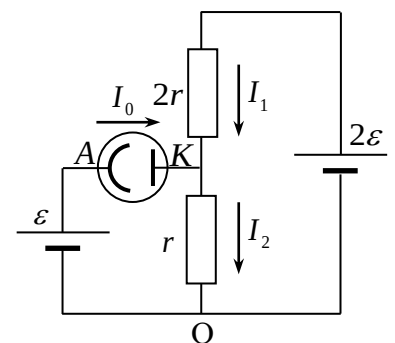
Т.е. больше, чем потенциал точки К. Поэтому наше предположение было неверным, и ток через фотоэлемент течет.

В этом случае токи, текущие через резисторы $2r$ и r , будут разными. Обозначим их I_1 и I_2 (см. рисунок). Тогда для этих токов справедливо условие токов в узле К (сумма втекающих токов равна сумме вытекающих)

$$I_0 + I_1 = I_2,$$

а для правого контура справедливо условие напряжений

$$I_1 2r + I_2 r = 2\varepsilon.$$



Решая эту систему уравнений, находим

$$I_2 = \frac{2\varepsilon}{3r} + \frac{2}{3}I_0$$

Падение напряжения на резисторе r равно $I_2 r$, поэтому потенциал точки К равен

$$\varphi_K = \varphi_O + I_2 r = \varphi_O + \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}I_0 r.$$

Поскольку источник ε - идеален, напряжение на нем равно его ЭДС. Поэтому

$$\varphi_A = \varphi_O + \varepsilon$$

Отсюда находим

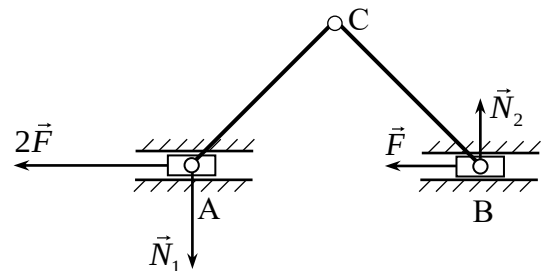
$$\varphi_A - \varphi_K = \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{3} - \frac{2}{3}I_0 r = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3}I_0 r = 5,66 \text{ В.}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Доказано, что потенциал точки А больше потенциала точки К – 1 балл
2. Правильно записаны условие токов в узле К и условие напряжений для правого контура - 1 балл
3. Правильно найден ток через нижний резистор – 1 балл
4. Правильный ответ (формула) – 1 балл
5. Правильный ответ (число) – 1 балл.

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

5. Чтобы механизм находился в равновесии, нужно, чтобы шарнир С покоился, и шатуны АС и ВС не вращались относительно него. Но сила $2\vec{F}$ пытается закрутить шатун АС по часовой стрелке относительно шарнира С, поэтому в левой направляющей возникнет сила реакции $\vec{N}_1$, направленная так, как показано на рисунке. Аналогично на ползун В со стороны правой направляющей действует такая сила реакции $\vec{N}_2$, как показано на рисунке. В равновесии суммы моментов сил $2\vec{F}$ и $\vec{N}_1$, а также сил $\vec{F}$ и $\vec{N}_2$ относительно шарнира С должны равняться нулю. А поскольку шатуны АС и ВС наклонены к направляющим под углом 45° , условия моментов относительно шарнира С дают

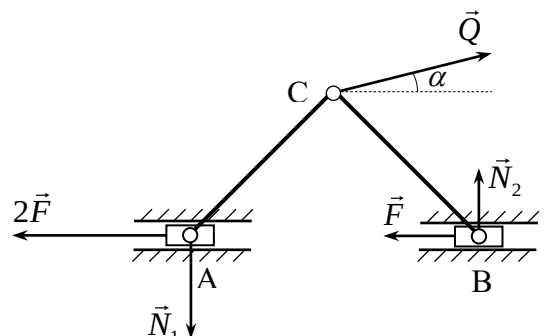


$$2Fl \frac{\sqrt{2}}{2} = N_1 l \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad N_1 = 2F$$

$$Fl \frac{\sqrt{2}}{2} = N_2 l \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad N_2 = F$$

где l - длина шатунов АС и ВС.

Чтобы механизм находился в равновесии, сумма сил действующих на него должна равняться нулю. Поэтому на шарнир С должна действовать



такая сила $\vec{Q}$, чтобы ее проекция на направляющие равнялась $3F$, а на направление, перпендикулярное направляющим - $N_1 - N_2$ (см. рисунок). Поэтому

$$Q \cos \alpha = 3F, \quad Q \sin \alpha = N_1 - N_2 = F$$

где α - угол между силой $\vec{Q}$ и направляющими. Отсюда получаем, что величина силы Q равна

$$Q = \sqrt{10}F,$$

а угол между вектором силы $\vec{Q}$ и направляющими равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}.$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильные условия равновесия – должен покоиться шарнир С, и ползуны не должны вращаться относительно шарнира С - 1 балл
2. Правильно расставлены силы - 1 балл
3. Правильно найдены силы реакции направляющих – 1 балл
4. Правильный ответ для величины силы, действующей на шарнир С – 1 балл
5. Правильный ответ для угла между силой $\vec{Q}$ и направляющими – 1 балл.

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Поскольку сопротивление источника много больше сопротивления внешней цепи, то сила тока, текущего через резистор, не зависит от его сопротивления. Действительно, при большом сопротивлении источника в законе Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

можно пренебречь сопротивлением внешней цепи и считать, что сила тока в цепи I не зависит от внешнего сопротивления R , а определяется только ЭДС источника и его внутренним сопротивлением r

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

Поэтому дальше везде будем считать, что сила тока, текущего через резистор, не зависит от сопротивления самого резистора и, следовательно, может быть установлена любой по нашему желанию с помощью изменения, например, внутреннего сопротивления источника.

При комнатной температуре сопротивление резистора равно R_0 . Поэтому если установить очень малый ток через резистор, тепловыделение в цепи мало, и резистор имеет именно такое сопротивление.

Посмотрим, что будет происходить при увеличении тока. Устанавливаем ток через резистор, равный I , и пусть сопротивление резистора при этом токе возросло до значения R и далее перестало меняться. Это значит, что температура резистора выросла, и при этой температуре мощности тепловыделения и теплопотерь одинаковы, т.е.

$$I^2 R_0 (1 + \alpha(T - T_0)) = k(T - T_0)$$

Где T - установившаяся температура резистора при токе I , k - коэффициент, определяющий теплоотдачу от резистора и зависящий от свойств теплопроводности изоляции резистора. Отсюда находим

$$T - T_0 = \frac{I^2 R_0}{k - \alpha I^2 R_0}$$

Отсюда следует, что если

$$I \rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{k}{\alpha R_0}} \quad (*)$$

то температура резистора неограниченно возрастает, и, следовательно, резистор перегорит. Это происходит потому, что при заданном токе выделяемая в резисторе мощность и мощность теплопотерь пропорциональны разности температур резистора и окружающей среды. Но мощность тепловыделения пропорциональна еще и протекающему через резистор току. А это значит, что при определенном токе мощность тепловыделения будет расти с ростом температуры быстрее, чем мощность теплоотвода. Резистор будет нагреваться и перегорит.

Найдем, при каком токе это произойдет. Пусть при токе I_1 температура резистора и его сопротивление равны T_1 и R_1 соответственно. Тогда

$$R_1 = R_0 + R_0 \alpha (T_1 - T_0),$$

и

$$I_1^2 R_0 (1 + \alpha(T_1 - T_0)) = k(T_1 - T_0)$$

Выражая из этих формул разности температур $T_1 - T_0$ и приравнявая их, получим

$$\frac{\alpha I_1^2 R_0}{k - \alpha I_1^2 R_0} = \frac{R_1 - R_0}{R_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{(\alpha/k) I_1^2 R_0}{1 - (\alpha/k) I_1^2 R_0} = \frac{R_1 - R_0}{R_0}$$

Из последнего уравнения находим

$$\frac{\alpha}{k} = \frac{R_1 - R_0}{R_1 R_0 I_1^2}$$

Подставляя это значение в формулу (*), находим максимальный ток, при котором перегорает резистор

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{R_1}{R_1 - R_0}} I_1 = 1,26 \text{ А.}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильное утверждение, что ток через резистор не зависит от его сопротивления – 1 балл
2. Правильная идея решения – когда тепловыделение превосходит теплоотдачу, резистор перегорит - 1 балл
3. Правильное выражение для максимального тока – 1 балл
4. Правильное уравнение теплового баланса – 1 балл

5. Правильный ответ (формула и число) – 1 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов.

Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.