

Решения и критерии оценивания

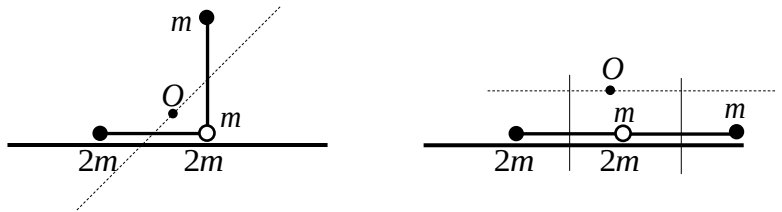
1. Поскольку на систему тел и стержней действуют только силы, направленные вертикально, центр масс системы не может изменить горизонтальную проекцию своей скорости. А поскольку вначале она равнялась нулю, то и в момент падения центр масс системы будет перемещаться только по вертикали. Поэтому в момент падения шарика массой m на поверхность он будет двигаться только по вертикали (в случае его горизонтального движения центр масс двигался бы по горизонтали), т.е. шарик массой $2m$ и шарнир массой $3m$ будут покоиться, а шарик массой m будет двигаться вертикально вниз. Его скорость находим из закона сохранения энергии

$$mgl = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gl}$$

Найдем теперь место, где упал шарик массой m . Для этого найдем положения центра масс в начальный момент времени. Поскольку нашу систему можно представить как наложение двух симметричных гантелей с массами $2m$ и m (см. рисунок), то центр масс этой системы будет лежать на прямой, соединяющей центры стержней. Т.е. на прямой, расположенной под углом 45° к поверхности, на вдвое более близком расстоянии к середине горизонтального стержня, чем к середине вертикального (на левом рисунке эта точка отмечена буквой O). И, значит, по горизонтали центр тяжести находится левее шарнира на расстоянии

$$\Delta x_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{3}$$

где l - длина стержня. Или



После падения шарика массой m на поверхность центр масс системы будет также находиться на прямой, проходящей через центры стержней, вдвое ближе к середине левого стержня (см. правый рисунок; чтобы на загромождать его мы сдвинули положение центра масс вверх). Поэтому центр масс будет находиться левее шарнира на расстоянии

$$\Delta x_2 = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{l}{6}$$

А поскольку горизонтальная координата центра масс в процессе падения не изменится, это означает, что шарнир сдвинется влево на расстояние

$$\Delta x_1 - \Delta x_2 = \frac{l}{6}$$

А поскольку расстояние от места падения шарика до нового положения шарнира равно l , то шарик упадет в точке, лежащей на расстоянии

$$\Delta x = l - \frac{l}{6} = \frac{5}{6}l$$

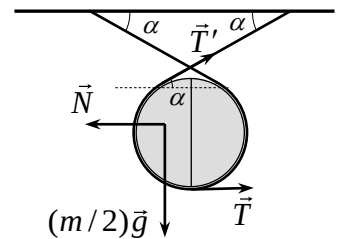
правее старого положения шарнира.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Обоснование, что центр масс будет двигаться только по вертикали - 1 балл
2. Правильные скорости шарика массы $2m$ и шарнира в момент падения – 1 балл
3. Правильный ответ для скорости шарика массой m в момент падения – 1 балл
4. Правильно найдена горизонтальная координата центра масс в начальном и конечном положении (по отношению к шарикам или шарниру) – 1 балл
5. Правильный ответ для расстояния между упавшим шариком массой m и начальным положением шарнира – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

2. Силы, действующие на левый полуцилиндр показаны на рисунке (на правый будут действовать такие же). Это сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$ со стороны правого полуцилиндра, и две силы натяжения нити $\vec{T}$ и $\vec{T}'$, модули которых равны (см. рисунок). Из вертикальной проекции условия равновесия находим силу натяжения нити T



$$T \sin \alpha = mg \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{\sin \alpha}$$

а из горизонтальной – искомую силу реакции

$$N = T + T \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} = mg \operatorname{ctg}(\alpha/2)$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильно расставлены силы, действующие на полуцилиндры – 1 балл
2. Правильно записано условие равновесия полуцилиндров - 1 балл
3. Правильно найдена сила натяжения нити – 1 балл
4. Правильно написано горизонтальная проекция условия равновесия – 1 балл
5. Правильный второй ответ – 1 балл.

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

3. Предположим, что ток через фотоэлемент не течет, найдем напряжение на нем и проверим, будет ли выполняться условие $\varphi_A < \varphi_K$. Если да, то наше предположение было правильным.

Если через фотоэлемент не течет ток, ток, текущий через резисторы $2r$ и r одинаков и равен

$$I = \frac{2\varepsilon}{3r}.$$

Поэтому падение напряжение на резисторе r равно $2\varepsilon/3$, и, следовательно, потенциал точки К равен

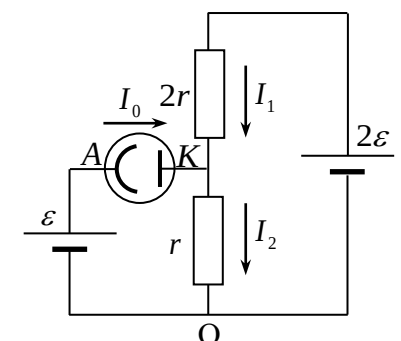
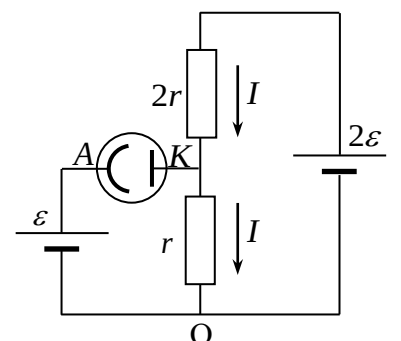
$$\varphi_K = \varphi_O + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

А поскольку напряжение на левом источнике равно ε , потенциал точки А равен

$$\varphi_A = \varphi_O + \varepsilon.$$

Т.е. больше, чем потенциал точки К. Поэтому наше предположение было неверным, и ток через фотоэлемент течет.

В этом случае токи, текущие через резисторы $2r$ и r , будут разными. Обозначим их I_1 и I_2 (см. рисунок). Тогда для этих токов справедливо условие токов в узле К (сумма втекающих токов равна



сумме вытекающих)

$$I_0 + I_1 = I_2,$$

а для правого контура справедливо условие напряжений

$$I_1 2r + I_2 r = 2\varepsilon.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$I_2 = \frac{2\varepsilon}{3r} + \frac{2}{3} I_0$$

Падение напряжения на резисторе r равно $I_2 r$, поэтому потенциал точки К равен

$$\varphi_K = \varphi_O + I_2 r = \varphi_O + \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{2}{3} I_0 r.$$

Поскольку источник ε - идеален, напряжение на нем равно его ЭДС. Поэтому

$$\varphi_A = \varphi_O + \varepsilon$$

Отсюда находим

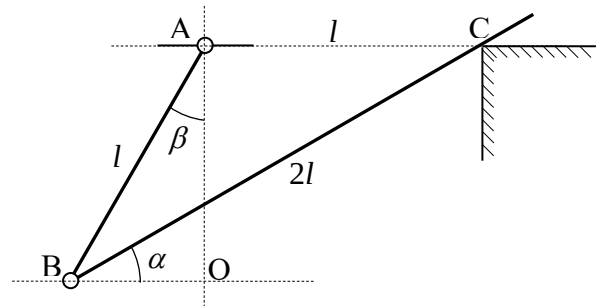
$$\varphi_A - \varphi_K = \varepsilon - \frac{2\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} I_0 r = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2}{3} I_0 r = 5,66 \text{ В.}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Доказано, что потенциал точки А больше потенциала точки К – 1 балл
2. Правильно записаны условие токов в узле К и условие напряжений для правого контура – 1 балл
3. Правильно найден ток через нижний резистор – 1 балл
4. Правильный ответ (формула) – 1 балл
5. Правильный ответ (число) – 1 балл.

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

4. Будем положение равновесия стержней из условия минимума потенциальной энергии этой системы стержней. Пусть, угол наклона длинного стержня к горизонтали равен α (см. рисунок). Поскольку треугольник ABC равнобедренный (по условию короткий стержень и расстояние AC одинаковы), что угол наклона короткого стержня к вертикали ($\angle BAO$) равен



$$\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha.$$

Потенциальную энергию системы стержней найдем как сумму потенциальных энергий каждого стержня, а последние – как потенциальные энергии материальных точек массой m и $2m$, расположенных в центрах масс стержней (т.е. посередине). Начало отсчета потенциальной энергии выберем в точке шарнира, к которому подвешен короткий стержень. Тогда потенциальная энергия короткого стержня есть

$$\Pi_1 = -mg \frac{l}{2} \cos \beta = -mg \frac{l}{2} \sin 2\alpha$$

Середина второго стержня находится ниже шарнира, к которому крепится короткий стержень, на расстоянии $l \cos \beta - l \sin \alpha$. Поэтому потенциальная энергия длинного стержня равна

$$\Pi_2 = -2mgl(\cos\beta - \sin\alpha) = -2mgl(\sin 2\alpha - \sin\alpha)$$

Отсюда находим потенциальную энергию системы стержней

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -\frac{5}{2}mgl \sin 2\alpha + 2mgl \sin \alpha$$

Для нахождения минимума дифференцируем и приравняем производную к нулю

$$\Pi' = -5mgl \cos 2\alpha + 2mgl \cos \alpha = 0$$

Раскрывая косинус двойного угла и используя основное тригонометрическое тождество, получим квадратное уравнение относительно $\cos \alpha$

$$10\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha - 5 = 0$$

Отсюда

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1 + \sqrt{51}}{10}\right) = 35,5^\circ$$

(второй корень квадратного уравнения является отрицательным, а искомый угол - острый).

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Правильная идея решения –использование принципа минимума потенциальной энергии в равновесии – 1 балл**
- 2. Правильно идея поиска потенциальной энергии – через центры тяжести стержней - 1 балл**
- 3. Правильно найдена потенциальная энергия системы – 1 балл**
- 4. Правильно найдена производная – 1 балл**
- 5. Правильный ответ (если участник не вычислил угол, а оставил ответ через арккосинус, оценку не снижать) – 1 балл**

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

5. Поскольку сопротивление источника много больше сопротивления внешней цепи, то сила тока, текущего через резистор, не зависит от его сопротивления. Действительно, при большом сопротивлении источника в законе Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

можно пренебречь сопротивлением внешней цепи и считать, что сила тока в цепи I не зависит от внешнего сопротивления R , а определяется только ЭДС источника и его внутренним сопротивлением r

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

Поэтому дальше везде будем считать, что сила тока, текущего через резистор, не зависит от сопротивления самого резистора и, следовательно, может быть установлена любой по нашему желанию с помощью изменения, например, внутреннего сопротивления источника.

При комнатной температуре сопротивление резистора равно R_0 . Поэтому если установить очень малый ток через резистор, тепловыделение в цепи мало, и резистор имеет именно такое сопротивление.

Посмотрим, что будет происходить при увеличении тока. Устанавливаем ток через резистор, равный I , и пусть сопротивление резистора при этом токе возросло до значения R и далее перестало меняться. Это значит, что температура резистора выросла, и при этой температуре мощности тепловыделения и теплопотерь одинаковы, т.е.

$$I^2 R_0 (1 + \alpha(T - T_0)) = k(T - T_0)$$

Где T - установившаяся температура резистора при токе I , k - коэффициент, определяющий теплоотдачу от резистора и зависящий от свойств теплопроводности изоляции резистора. Отсюда находим

$$T - T_0 = \frac{I^2 R_0}{k - \alpha I^2 R_0}$$

Отсюда следует, что если

$$I \rightarrow I_{\max} = \sqrt{\frac{k}{\alpha R_0}} \quad (*)$$

то температура резистора неограниченно возрастает, и, следовательно, резистор перегорит. Это происходит потому, что при заданном токе выделяемая в резисторе мощность и мощность теплопотерь пропорциональны разности температур резистора и окружающей среды. Но мощность тепловыделения пропорциональна еще и протекающему через резистор току. А это значит, что при определенном токе мощность тепловыделения будет расти с ростом температуры быстрее, чем мощность теплоотвода. Резистор будет нагреваться и перегорит.

Найдем, при каком токе это произойдет. Пусть при токе I_1 температура резистора и его сопротивление равны T_1 и R_1 соответственно. Тогда

$$R_1 = R_0 + R_0 \alpha (T_1 - T_0),$$

и

$$I_1^2 R_0 (1 + \alpha(T_1 - T_0)) = k(T_1 - T_0)$$

Выражая из этих формул разности температур $T_1 - T_0$ и приравнявая их, получим

$$\frac{\alpha I_1^2 R_0}{k - \alpha I_1^2 R_0} = \frac{R_1 - R_0}{R_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{(\alpha/k) I_1^2 R_0}{1 - (\alpha/k) I_1^2 R_0} = \frac{R_1 - R_0}{R_0}$$

Из последнего уравнения находим

$$\frac{\alpha}{k} = \frac{R_1 - R_0}{R_1 R_0 I_1^2}$$

Подставляя это значение в формулу (*), находим максимальный ток, при котором перегорает резистор

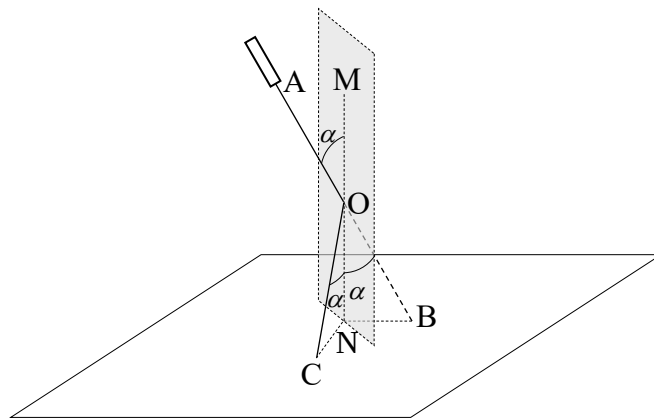
$$I_{\max} = \sqrt{\frac{R_1}{R_1 - R_0}} I_1 = 1,26 \text{ А.}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильное утверждение, что ток через резистор не зависит от его сопротивления – 1 балл
2. Правильная идея решения – когда тепловыделение превосходит теплоотдачу, резистор перегорит - 1 балл
3. Правильное выражение для максимального тока – 1 балл
4. Правильное уравнение теплового баланса – 1 балл
5. Правильный ответ (формула и число) – 1 балла

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Рассмотрим луч АО, падающий в точку стержня О. Отрезком ОВ показано продолжение луча после точки В (если бы не было отражения луча от боковой поверхности). Вертикальным пунктирным отрезком MN показана вертикальная прямая, проходящая через точку падения луча на стержень и лежащая на боковой поверхности стержня (показан также «кусочек» боковой поверхности стержня, выделенный серой заливкой).



Отрезком ОС показан отраженный от боковой поверхности луч. Понятно, что отраженный луч зависит от того, как ориентирован «кусочек» боковой поверхности стержня по отношению к лучу. Это значит, что отраженные лучи будут занимать разные положения в пространстве. Но, как бы они не были ориентированы, отраженный луч, и продолжение падающего луча располагаются симметрично относительно «кусочка» боковой поверхности стержня. А это значит, что треугольники ONB и ONC равны независимо от ориентации «кусочка» боковой поверхности стержня по отношению к падающему лучу. И, следовательно, $NB=NC$. А это в свою очередь означает, что точки падения отраженных лучей на поверхность стола будут находиться на равных расстояниях от основания стержня. Или, другими словами, отраженные лучи на поверхности стола образуют окружность с центром в той точке, где находится основание стержня, и с радиусом

$$r = h \operatorname{tg} \alpha .$$

Конечно, эта окружность будет неполная, поскольку за стержнем будет область геометрической тени, куда никакие лучи не попадут.

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Использован правильный закон отражения от боковой поверхности – 1 балл
2. Правильное построение области на столе, куда попадают отраженные лучи - 2 балла
3. Правильное обоснование построения – 1 балл
4. Правильный ответ для радиуса окружности – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.