

**Решения и критерии оценки работ заключительного тура
Инженерной олимпиады школьников**

9 класс, 2025-2026 учебный год

Решения и критерии оценивания

1. Для пробивания закреплённой дощечки пуля должна иметь некоторую минимальную скорость для совершения работы против сил сопротивления материала дощечки. А когда пуля попадает в незакреплённую дощечку, часть ее энергии тратится на энергию, которую приобретает дощечка. Поэтому скорость пули, необходимая для пробивания незакреплённой дощечки, должна быть больше. Эту разницу найдем с помощью закона сохранения импульса.

Для закреплённой дощечки закон сохранения энергии дает

$$\frac{mv_0^2}{2} = -A \quad (*)$$

где m - масса пули, A - работа сил сопротивления. Эта работа силы сопротивления, совершенная при пробивании дощечки, будет совершена независимо от того, закреплена дощечка или нет.

Когда пуля пробивает незакреплённую дощечку минимальной скорости пробивания отвечает ситуация, когда скорости дощечки и пули после пробития дощечки равны (т.е. пуля практически не перемещается относительно дощечки). Поэтому законы сохранения энергии и импульса дают

$$\begin{aligned} mnv_0 &= (m + M)v_1 \\ \frac{mn^2v_0^2}{2} - \frac{(m + M)v_1^2}{2} &= -A \end{aligned}$$

где $n = 1,1$, M - масса дощечки, v_1 - скорость дощечки и пули после пробивания незакреплённой дощечки. Выражая скорость v_1 из первого уравнения и подставляя ее во второе, получим с учетом (*)

$$n^2 - \frac{n^2m}{M + m} = 1$$

Отсюда получаем

$$(n^2 - 1)M = m$$

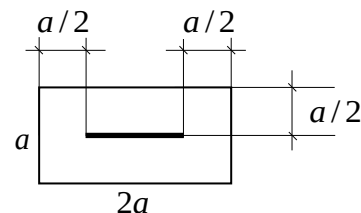
Или

$$\frac{m}{M} = n^2 - 1 = 0,21$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

- 1. Правильная идея решения – часть энергии пули тратится на кинетическую энергию незакреплённой дощечки - 1 балл**
 - 2. Правильно найдена работа силы сопротивления материала дощечки при пробивании – 1 балл**
 - 3. Правильные закон сохранения импульса и энергии для пробивания пуль незакреплённой дощечки – 1 балл**
 - 4. Правильный ответ (формула) – 1 балл**
 - 5. Правильный ответ (число) – 1 балл**
- Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.**

2. Чтобы вся пластина была охвачена огнем, огонь должен прийти от сторон пластины до точек наиболее удаленных от сторон пластины. Для прямоугольной пластинки со сторонами a и $2a$ это точки, лежащие посередине пластины на расстоянии $a/2$ от сторон (см. рисунок; точки наиболее удаленные от сторон, показаны жирной прямой).



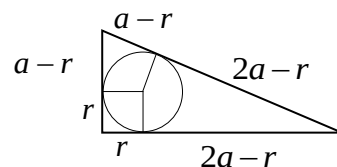
Из рисунка видим, что огонь должен пройти расстояние $a/2$. Поэтому скорость распространения огня по материалу пластинки равна

$$v = \frac{a}{2t}$$

А для того, чтобы пластинка в форме прямоугольного треугольника, подожженная одновременно со всех сторон, была полностью охвачена огнем, нужно чтобы огонь дошел до точки, максимально удаленной от сторон треугольника. А это - центр вписанной окружности, и огонь дойдет до этой точки через время

$$t_1 = \frac{r}{v} = \frac{2rt}{a} \quad (*)$$

где r - радиус вписанной окружности. Радиус вписанной в треугольник окружности найдем из следующих геометрических соображений. Проведем из центра вписанной окружности радиусы в точки касания окружностью катетов и гипотенузы. Тогда, поскольку катеты и гипотенуза являются касательными к вписанной



окружности, то очевидно, что расстояния от точек касания окружностью катетов до вершины прямого угла равны r (см. рисунок). Поэтому расстояния от этих точек до вершин острых углов равны $a - r$ и $2a - r$ (см. рисунок). С другой стороны, эти расстояния равны расстояниям от вершин острых углов до точки касания вписанной окружностью гипотенузы (см. рисунок). Поэтому

$$c = a - r + 2a - r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3a - c}{2} = \frac{(3 - \sqrt{5})}{2}a$$

где $c = \sqrt{5}a$ - гипотенуза треугольника. В результате из формулы (*) получаем

$$t_1 = (3 - \sqrt{5})t$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея решения – найти скорость распространения огня из данных по прямоугольной пластинке, а затем использовать их для пластинки в форме прямоугольного треугольника - 1 балл
2. Правильно найдена скорость распространения огня – 1 балл
3. Правильное утверждение, что пластинка в форме треугольника будет полностью охвачена огнем, когда огонь дойдет до центра вписанной окружности – 1 балл
4. Правильно найден радиус вписанной окружности и обосновано его нахождение – 1 балл
5. Правильный ответ – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

3. Поскольку при небольших изменениях температуры t_1 температура t_x меняется, в конечном состоянии не может находиться смесь воды и льда при температуре 0°C (в этом случае при небольших изменениях температуры t_1 температура конечного состояния не изменялась бы). Исследуем оба этих случая.

1. В конечном состоянии лед. В этом случае горячая вода охладится до температуры кристаллизации $t = 0^\circ\text{C}$, превратится в лед, а потом, уже будучи льдом, охладится до температуры t_x (которая будет отрицательной). Уравнение теплового баланса для такого процесса имеет вид

$$c_в m_2 (t_в - 0^\circ\text{C}) + \lambda m_2 + c_л m_2 (0^\circ\text{C} - t_x) = c_л m_1 (t_x - t_1)$$

где $c_л$ - искомая удельная теплоёмкость льда, λ - удельная теплота плавления льда. Отсюда находим

$$t_x = \frac{c_в m_2 t_в + \lambda m_2}{c_л (m_1 + m_2)} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} t_1$$

Первое слагаемое положительно и с учетом того, что нам неизвестна начальная температура горячей воды $t_в$, и предполагаются неизвестными λ и $c_л$ может равняться 40°C , как это дано в условии. А вот второе слагаемое точно не такое, как в условии. Коэффициент перед t_1 в нем равен

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{0,1}{0,1 + 0,2} = \frac{1}{3} = 0,33 \neq 0,167 \text{ (из условия).}$$

Поэтому этот случай не реализуется.

2. В конечном состоянии вода. В этом случае горячая вода охладится до температуры t_x , лед нагреется до температуры плавления, расплавится, а потом, уже будучи водой, нагреется до температуры t_x . Поэтому уравнение теплового баланса имеет вид

$$c_в m_2 (t_в - t_x) = c_л m_1 (0^\circ\text{C} - t_1) + \lambda m_1 + c_в m_1 (t_x - 0^\circ\text{C})$$

Отсюда находим

$$t_x = \frac{c_в m_2 t_в + \lambda m_1}{m_1 + m_2} + \frac{c_л m_1}{c_в (m_1 + m_2)} t_1$$

Эта формула не противоречит данному в условии $t_x = (40 + 0,167 t_1)^\circ\text{C}$. Следовательно,

$$\frac{c_л m_1}{c_в (m_1 + m_2)} = 0,167$$

Отсюда находим

$$c_л = 0,167 \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} c_в = 2100 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{град)}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Использование формул $Q = cm\Delta T$ и $Q = \lambda m$ для количеств теплоты, полученных отданных при нагревании или превращении воды в лед или льда в воду – 1 балл
2. Понято (и доказано), что в конечном состоянии не может быть льда и воды в равновесии – 1 балл
3. Доказано, что в конечном состоянии не может быть только льда – 1 балл
4. Правильное уравнение теплового баланса – 1 балл
5. Правильный ответ (формула и число) – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Комментарий. Если нет доказательства того, что в конце не может быть смеси воды и льда или только льда, максимальная оценка за задачу – 3 балла.

4. Данная в условии задачи зависимость скорости вытекания воды из отверстия в сосуде от уровня воды в сосуде связана с гидростатическим давлением, которое растет с ростом высоты столба воды. А если бы при вытекании давление воды около отверстия не изменялась бы? Тогда мы должны предположить, что скорость не изменялась бы (это можно строго доказать из закона Бернулли)!

Рассмотрим теперь данный в условии сосуд Мариотта. Так как в трубке (до самого ее нижнего конца) находится атмосферный воздух, то давление воздуха в трубке равно атмосферному. А, значит, давление в воде в сосуде на уровне нижнего конца трубочки равно атмосферному независимо от высоты уровня воды над нижним концом трубочки. Значит, давление воды на уровне отверстия равно

$$p_a + \rho g H_2$$

где H_2 - расстояние от нижнего конца трубочки до отверстия. Следовательно, давление воды на уровне отверстия не зависит от уровня воды над нижним концом трубочки, и вода будет вытекать из отверстия с постоянной скоростью

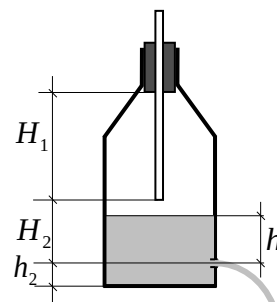
$$v = \sqrt{\rho g H_2} \quad (*)$$

пока нижний конец трубочки будет находиться в воде. Следовательно, пока нижний конец трубочки находится в воде, скорость вытекания воды из сосуда постоянна и равна величине (*). После того как вода спустится ниже нижнего конца трубочки, внутри сосуда будет атмосферный воздух, и сосуд с водой будет иметь открытую в атмосферу поверхность. Поэтому для скорости вытекания воды будет справедлива обычная формула Торричелли

$$v = \sqrt{\rho g h}$$

где h - высота уровня воды над отверстием (см. рисунок). Т.е. до того, как нижний конец находится в воде, скорость вытекания постоянна, а после того, как нижний конец оказывается на воздухе, скорость вытекания воды пропорциональна квадратному корню из высоты уровня воды над отверстием. Таким образом, для скорости вытекания окончательно имеем

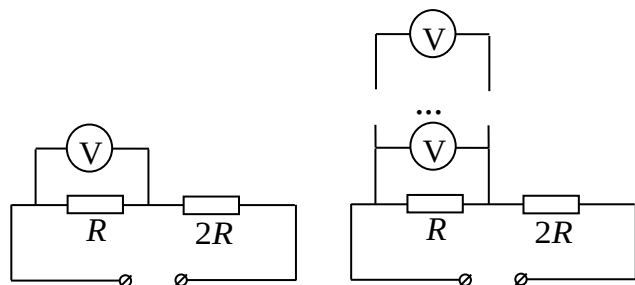
$$v = \begin{cases} \sqrt{\rho g H_2}, & \text{если нижний конец трубочки находится в воде} \\ \sqrt{\rho g h}, & \text{если уровень воды ниже нижнего конца трубочки} \end{cases}$$



Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Понимание того, что скорость вытекания определяется гидростатическим давлением – 1 балл
2. Правильное понимание, что давление воды в сосуде Мариотта на уровне нижнего конца трубочки равно атмосферному давлению - 1 балл
3. Правильный вывод, что давление в сосуде на уровне отверстия (пока нижний конец трубочки находится в воде) равно $\rho g H_2$ и не зависит от уровня воды в сосуде – 1 балл
4. Правильный ответ для скорости вытекания пока нижний конец трубочки находится в воде – 1 балл
5. Правильный ответ для скорости вытекания, когда уровень воды будет ниже нижнего конца трубочки – 1 балл.

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.



5. В электрической цепи, схема которой дана на левом рисунке, к идеальному источнику напряжения $U = 36$ В подключают два резистора R и $2R$. Параллельно с первым резистором включают вольтметр, который показывает напряжение $U_0 = 11,5$ В. Какими будут показания последнего вольтметра, если подключить к этому резистору параллельно 10 одинаковых вольтметров?

5. Очевидно, что вольтметр неидеальный, поскольку в случае идеальности его показания составили бы одну треть напряжения источника, а они меньше.

Пусть сопротивление вольтметра r . Тогда сопротивление участка цепи, содержащего резистор R и вольтметр, равно

$$\frac{rR}{r+R}$$

Следовательно, показания вольтметра составляют

$$U_0 = \frac{U \frac{rR}{r+R}}{\frac{rR}{r+R} + 2R} = \frac{UrR}{3rR + 2R^2} \quad (*)$$

Отсюда находим сопротивление вольтметра

$$r = \frac{2U_0R}{U - 3U_0}. \quad (**)$$

Пусть теперь к резистору R подключены параллельно 10 одинаковых вольтметров. Тогда показания каждого одинаковы. При этом для нахождения этих показаний можно воспользоваться формулой (*) в которой сопротивление вольтметра r нужно заменить на сопротивление десяти вольтметров, соединенных параллельно, т.е. $r \rightarrow r/10$. Используя также сопротивление вольтметра (*), получим для показаний десятого вольтметра

$$U_1 = \frac{U \frac{(r/10)R}{(r/10)+R}}{\frac{(r/10)R}{(r/10)+R} + 2R} = \frac{2UU_0}{20U - 54U_0} = \frac{UU_0}{10U - 27U_0} = 8,36 \text{ В}$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильно понято и обосновано, что вольтметр не идеален – 1 балл
2. Правильное использование закона Ома - 1 балл
3. Правильно найдено сопротивление вольтметра – 1 балл
4. Правильное уравнение для показания десятого вольтметра (в случае включения десяти вольтметров) – 1 балла
5. Правильный ответ (формула и число) – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

6. Поскольку угол между стержнями равен 60° , то соединить два одинаковых стержня можно пружиной, длина которой равна длине стержней. Поэтому в начальный момент пружина сжата на величину $\Delta l = 0,1l$. После отпускания пружина начнет разжиматься, пройдет положение, в котором она не деформирована, а потом будет растягиваться, и возникнут колебания. Понятно, что колебания пружины будут происходить между сжатием и растяжением на одну и ту же величину $\Delta l = 0,1l$. Поэтому в момент максимального растяжения длина пружины будет составлять $1,2l$. Найдем, насколько в процессе таких колебаний смещается шарнир.

Так как никаких внешних по отношению к этой системе сил на нее не действует, центр масс этой системы не может двигаться. Но центр масс системы находится ровно посередине между шарниром и пружиной. Поэтому в начальном положении шарнир находится на расстоянии

$$\Delta x_n = \frac{l}{2} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}l}{4}$$

Поскольку в конечном положении длина пружины будет равна $1,2l$, то расстояние от шарнира до центра масс будет равно

$$\Delta x_k = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - \left(\frac{6l}{10}\right)^2} = \frac{4l}{10}$$

И, следовательно, смещение шарнира в процессе колебаний составит

$$\Delta x = \Delta x_n - \Delta x_k = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{4}{10} \right) l = 0,033l$$

Критерии оценивания (максимальная оценка за задачу – 5 баллов):

1. Правильная идея решения – найти амплитуду колебаний шарнира – 1 балл
2. Правильное утверждение, что в начальном положении пружина сжата на $0,1l$, в конечном растянута на $0,1l$ - 1 балл
3. Правильное утверждение, что центр масс не будет двигаться – 1 балл
4. Правильно найдены расстояния от шарнира до центра масс в начальный и конечный моменты – 1 балл
5. Правильный ответ (формула и число) – 1 балл

Оценка за задачу находится как сумма оценок по перечисленным критериям.

Оценка работы

Оценка работы складывается из оценок задач. Максимальная оценка работы – 30 баллов. Допустимыми являются все целые оценки от 0 до 30.