



XXXI Санкт-Петербургская
астрономическая олимпиада
практический тур, решения

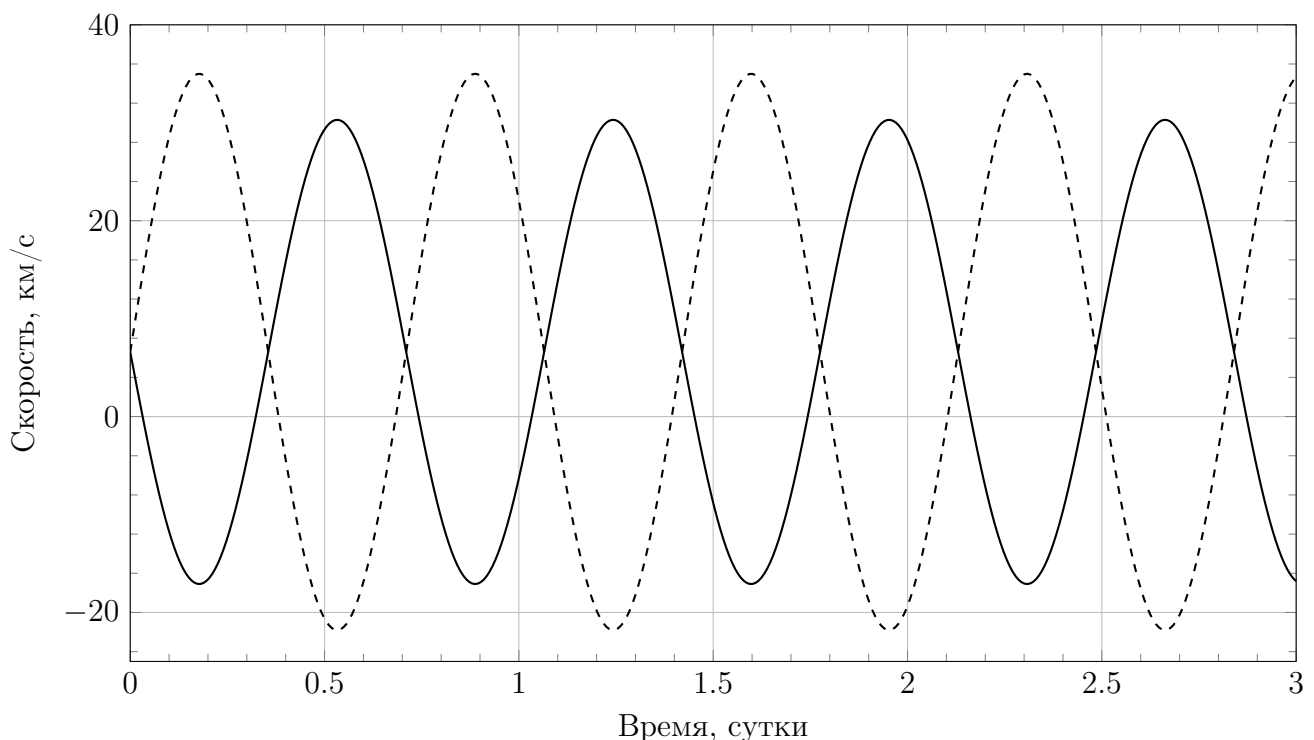
2024
3
марта

10 класс

Вам дана кривая лучевых скоростей двойной звезды LP 413–53AB, полученная в ходе наблюдений с 2007 по 2023 годы и аппроксимированная численной моделью. По оси абсцисс отложено время в сутках, по оси ординат — лучевая скорость каждой из компонент (в км/с). Определите:

- массы компонент;
- спектральные классы звезд;
- среднее расстояние между компонентами;
- угол наклона орбиты к лучу зрения.

Полуширина спектральной линии угарного газа (CO) $\lambda = 2314$ нм в спектре звезды, кривая лучевых скоростей которой обозначена штрихованной линией, составляет 0.34 \AA , в спектре звезды с кривой лучевых скоростей, обозначенной сплошной линией — 0.36 \AA , ускорения свободного падения на поверхности обеих компонент равны $3 \cdot 10^5 \text{ см/с}^2$. Можно считать, что оси вращения звезд перпендикулярны плоскости их орбит.



Решение:

Из предложенного графика мы сразу можем найти две величины: $P = 0.71$ суток — орбитальный период двойной звезды (неожиданно малый, не характерный для двойных звезд), а также v_0 — лучевую скорость системы как целого (равную $+6.6$ км/с). Благодаря проведенным дугам синусоид можно определить амплитуды наблюдаемых лучевых скоростей компонент. Более массивная звезда движется медленнее (ее амплитуда равна $K_1 = 23.7$ км/с), более

легкая — быстрее ($K_2 = 28.4$ км/с). Заметим, что использование просто максимальных значений скорости, снимаемых напрямую из графика (30.3 км/с и 35 км/с) является ошибкой.

Синусоиды выглядят практически неискаженно, так что эксцентриситет орбиты можно считать равным нулю (а орбиту, соответственно, круговой).

Фактически величины K_1 и K_2 не являются реальными орбитальными скоростями компонент, так как орбита может быть наклонена к лучу зрения (обычно принято искать угол i между нормалью к плоскости орбиты и лучом зрения), поэтому найденные величины — это истинные круговые скорости v_1 и v_2 относительно центра масс системы, исправленные за этот наклон:

$$K_1 = v_1 \sin i, \quad K_2 = v_2 \sin i.$$

В самом деле, если бы мы наблюдали систему «плашмя» ($i = 0^\circ$), то лучевая скорость любого из компонент равнялась бы нулю всегда.

Теперь построим модель двойной системы. Пусть радиусы орбит компонент вокруг центра масс равны r_1 и r_2 (более массивный компонент имеет индекс 1), причем их сумма — это расстояние между компонентами:

$$r_1 + r_2 = a.$$

Радиусы и массы компонент связаны «правилом рычага»

$$M_1 r_1 = M_2 r_2,$$

где M_i — массы компонент. Осталось связать наблюдаемую скорость с параметрами орбиты:

$$K_j = v_j \sin i = \frac{2\pi r_j}{P} \sin i$$

Воспользуемся также законом сохранения импульса (точнее, утверждением, что импульс системы в барицентрической системе отсчета равен нулю):

$$M_1 v_1 = M_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad M_1 K_1 = M_2 K_2 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{M_2}{M_1} = \frac{K_1}{K_2} = 0.83.$$

Как видим, это позволило вычислить отношение масс компаньонов $q = M_2/M_1 \leq 1$.

Если выразить, например, r_2 через a и r_1 , а потом подставить это в правило рычага, чтобы выразить r_1 , и затем подставить это в формулу для скорости V_1 , то получим такое выражение:

$$K_1 = \frac{2\pi a}{P} \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} \sin i \quad \Rightarrow \quad a = \frac{PK_1}{2\pi} \cdot \frac{M_1 + M_2}{M_2 \sin i}$$

Наконец, для системы верен III закон Кеплера

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2} (M_1 + M_2),$$

где G — гравитационная постоянная. Подставим в него большую полуось, выраженную через период P , наблюдаемую скорость первой компоненты V_1 и массы компонент

$$PK_1^3 (M_1 + M_2)^2 = 2\pi G M_2^3 \sin^3 i.$$

Тем самым мы получили так называемую функцию масс (причем использовали при этом общепринятые обозначения):

$$f(M_2) = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{PK_1^3}{2\pi G}.$$

Данное выражение имеет размерность массы и позволяет по наблюдениям лучевой скорости одной компоненты двойной системы оценить величину массы другой. Заметим следующее: если разделить левую и среднюю части полученного выражения на M_2 , то

$$\frac{f(M_2)}{M_2} = \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 \sin^3 i = \left(\frac{q}{1 + q} \right)^2 \sin^3 i.$$

Ясно, что масса второй компоненты всегда меньше, чем сумма масс обеих компонент, синус угла также не больше единицы, а это означает, что $f(M_2) \leq M_2$, то есть функция масс всегда оценивает снизу массу компонент двойной звезды (автор задачи очень рекомендует ознакомиться с книгой В.М. Липунова «В мире двойных звезд», где смысл и использование функции масс подробно обсуждаются).

В нашем случае имеются значения K_1 и K_2 , что позволяет найти нижние оценки масс обеих компонент (здесь и далее везде используется система единиц СИ, если не указано иное):

$$M_2 \sin^3 i = \frac{PK_1^3}{2\pi G} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{-2} = \frac{(0.71 \cdot 86400) \cdot (23.7 \times 10^3)^3}{2\pi \cdot 6.67 \times 10^{-11}} \cdot 4.9 = 9.4 \times 10^{27} \text{ кг.}$$

$$M_1 \sin^3 i = \frac{PK_2^3}{2\pi G} \left(\frac{1}{1+q} \right)^{-2} = 1.1 \times 10^{28} \text{ кг.}$$

Таким образом, из орбитальных данных мы получили, что массы исследуемых звезд не меньше, чем несколько масс Юпитера ($M_{\text{ж}} = 2 \times 10^{27}$ кг).

Теперь воспользуемся остальной информацией о звездах. Уширение спектральной линии СО может быть вызвано двумя причинами: тепловым уширением (из-за тепловых движений молекул в фотосфере) и вращением каждой из звезд вокруг оси. Поскольку в спектре звезд в принципе присутствуют линии молекул, то сразу можно сказать, что температуры звезд не превышают 5000 К (это характерная температура для звезд спектрального класса К, в фотосферах которых еще можно обнаружить молекулы). Запишем выражение для эффекта Доплера для второй звезды:

$$\frac{\Delta\lambda_2}{\lambda} = \frac{V_{*2}}{c} \quad \Rightarrow \quad V_{*2} = c \cdot \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda} = 3 \times 10^5 \text{ км/с} \cdot \frac{0.34}{23140} \approx 4.4 \text{ км/с.}$$

Здесь $\Delta\lambda_2$ — полуширина спектральной линии более быстрой и легкой звезды, V_{*2} — лучевая скорость источника, c — скорость света. Оценим тепловую скорость v_T молекул СО в фотосфере звезд при максимально возможной их температуре:

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \times 10^{-23} \cdot 5 \times 10^3}{(12 + 16) \cdot 1.67 \times 10^{-27}}} \approx 2.1 \text{ км/с.}$$

Здесь k — постоянная Больцмана, $T = 5 \times 10^3$ К — абсолютная температура фотосферы, $m = 12 + 16$ а.е.м — масса одной молекулы С–О. Если мы примем величину скорости 4.4 км/с равной тепловой, то получим явно неадекватную оценку температуры фотосферы $\geq 10^4$ К. Далее будем считать, что обе звезды имеют одинаковую температуру и дают идентичный вклад тепловой скорости в уширение своих линий.

Ввиду малого периода обращения пары звезд и их небольшой оценке масс снизу, можно уверенно сказать, что период одного оборота вокруг своей оси каждой звезды равен периоду обращения компонент друг вокруг друга. Данная синхронизация определяется приливным взаимодействием.

С учетом наклона оси вращения каждой из звезд к лучу зрения (то есть того же самого угла i , введенного выше), можно записать:

$$V_{*j} - v_T = \frac{2\pi R_j}{P} \sin i \quad \Rightarrow \quad R_j \sin i = \frac{(V_{*j} - v_T)P}{2\pi} \quad \Rightarrow$$

$$R_2 \sin i = \frac{2.3 \times 10^3 \cdot 0.7 \cdot 86400}{2\pi} \approx 22 \times 10^3 \text{ км;} \quad R_1 \sin i = 25 \times 10^3 \text{ км.}$$

Здесь R_j — радиусы компаньонов. Итак, мы получили оценку снизу на размер каждого из компаньонов (реализующуюся в случае если $i = 90^\circ$). Поскольку период вращения звезд вокруг своей оси не слишком мал (и того же порядка, как у Земли), а радиусы звезд всего в 4 раза больше земного, то можно считать, что столь большое ускорение свободного падения

($10^{3.5} \gg 10 \text{ [м/с}^2\text{]})$ определяется исключительно гравитацией, а центробежное ускорение, вызванное вращением, можно не учитывать:

$$g = \frac{GM_j}{R_j^2} \quad \Rightarrow \quad M_j = \frac{gR_j^2}{G} \quad \Rightarrow$$

$$M_2 \sin^2 i = \frac{10^{3.5} \cdot (58 \times 10^6)^2}{6.67 \times 10^{-11}} = 2.4 \times 10^{28} \text{ кг}; \quad M_1 \sin^2 i = 3 \times 10^{28} \text{ кг}.$$

Таким образом получена еще одна оценка снизу на массы компаньонов: масса легкого компонента не менее $\sim 0.012M_\odot$, а масса тяжелого — $0.015M_\odot$ ($12M_\oplus$ и $15M_\oplus$ соответственно).

Теперь отметим, что у нас есть две разные оценки масс, обе они зависят от угла i , но с разными степенями синуса. Поэтому отсюда можно получить угол наклона нормали орбиты к лучу зрения:

$$\sin i(M_1) = \frac{M_1 \sin^3 i}{M_1 \sin^2 i} = 0.38; \quad \sin i(M_2) = \frac{M_2 \sin^3 i}{M_2 \sin^2 i} = 0.39.$$

Мы получили практически одинаковые синусы углов наклона для каждого из компонентов, что говорит о верности использованных приближений. Отличие объясняется неточностью $\Delta\lambda$, приближенностью вычислений и, скорее всего, завышенной оценкой температуры звезд. Тогда угол наклона можно считать равным $i \approx 23^\circ$. Зная его, находим массы компаньонов по отдельности (в массах Юпитера и массах Земли):

$$M_1 = 98M_\oplus = 31160M_\oplus; \quad M_2 = 81M_\oplus = 25760M_\oplus.$$

Теперь можно найти и большую полуось орбиты из третьего закона Кеплера (сравнивая систему с системой Луна–Земля). Период обращения Луны 27.3 суток, расстояние до Луны — 384 тыс. км, массы — в массах Земли:

$$a = 384 \sqrt[3]{\frac{0.71^2}{27.3^2} \cdot \frac{57 \times 10^3}{1}} \approx 384 \times 10 \sqrt[3]{\frac{0.5}{740} \frac{57}{1}} = 3840 \sqrt[3]{\frac{0.5}{13}} \approx 3840 \cdot \frac{1}{3} \approx 1.3 \text{ млн. км.}$$

Подытожим результаты:

- массы компонент 98 и 81 масс Юпитера;
- спектральный класс звезд — M или позже (почти что бурые карлики);
- расстояние между компонентами примерно в 3 раза больше расстояния от Земли до Луны: 1.3 миллиона километров;
- угол наклона орбиты к лучу зрения $90^\circ - i = 67^\circ$.

Отметим, что данная система реальная и была детально исследована в статье Chih-Chun Hsu et al., *ApJL*, **945**, L6, 2023.

В.В.Григорьев