XXXI Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада

теоретический тур, решения

2024

4 февраля

11 класс

1. В конце повести «Лиловый шар» добрый волшебник Оох забросил зловещий шар, созданный инопланетянами, прямо на Солнце. Считая, что дело происходило в солнечный полдень, а Оох не очень хорошо знал небесную механику и прицеливался точно в направлении Солнца, оцените, какую минимальную скорость ему при этом нужно было сообщить шару относительно Земли. Орбиту Земли можно считать круговой, релятивистскими эффектами пренебречь.

Решение:

Будем считать, что после старта шар летел по траектории, пересекающей поверхность Солнца. При этом его стартовая скорость v_1 в системе отсчёта Солнца складывалась из скорости v_1' относительно Земли и u — скорости самой Земли относительно Солнца. Поскольку дело происходило в солнечный полдень, а Оох целился точно на Солнце, то v_1' перпендикулярно u и $v_1^2 = (v_1')^2 + u^2$. Обозначим скорость шара в момент столкновения с Солнцем за v_2, угол между радиусом-вектором шара, исходящим из Солнца и скоростью v_2 за β. Запишем закон сохранения момента импульса:

$$v_2 \cdot \sin\beta \cdot R = u \cdot a,$$

где a — радиус орбиты Земли, R — радиус Солнца. Тогда,

$$v_2 = \frac{u \cdot a}{\sin\beta \cdot R}.$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$-\frac{GM}{R} + \frac{v_2^2}{2} = -\frac{GM}{a} + \frac{v_1^2}{2} = -\frac{GM}{a} + \frac{u^2}{2} + \frac{(v_1')^2}{2},$$

где M — масса Солнца. Подставим полученное из закона сохранения момента импульса выражение для v_2 в закон сохранения энергии, учтём, что $u = \sqrt{\frac{GM}{a}}$ и получим:

$$(v_1')^2 = -\frac{2GM}{R} + \frac{GM}{R}\frac{a}{R\sin\beta} + \frac{GM}{a} \approx \frac{GM}{R}\frac{a}{R\sin\beta}.$$

Требуется найти минимальную стартовую скорость, поэтому $\sin\beta = 1$ и

$$v_1' = \sqrt{\frac{GM}{R}\frac{a}{R}} \approx 6 \ \cdot 10^3 \text{ км/с}.$$

Обратим внимание, что эта скорость много больше космических скоростей для Земли, поэтому, в виду оценочности вычислений, учёт влияния гравитационного поля Земли даст избыточную точность.

И.Д.Маркозов

2. Как известно, положения звезд, наблюдаемых рядом с Солнцем во время полного солнечного затмения, отклоняются от истинных на $1''.75$. Найдите общую формулу, позволяющую вычислить минимальное фокусное расстояние сферически-симметричной гравитационной линзы массы M и радиуса R, если известно, что фокусное расстояние обратно пропорционально массе линзы.

Решение:

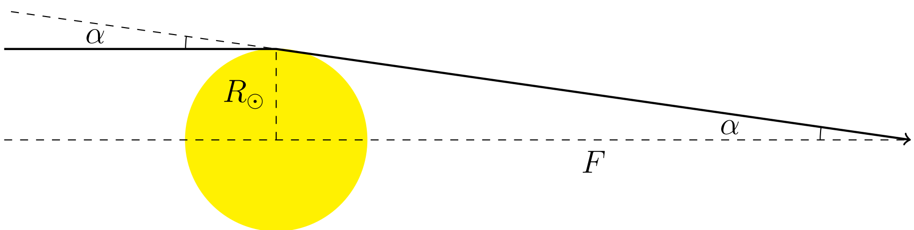
Попробуем подумать, какие физические величины могут входить в интересующую нас формулу. Это искомое фокусное расстояние F, известные по условию M и R, а также две физические константы, появляющиеся при описании гравитации и распространения электромагнитных волн — гравитационная постоянная G и скорость света c. Из соображений размерности все, кроме F, должно каким-то образом попасть в выражение, имеющее размерность длины. Попробуем его подобрать.

Сразу же можно упростить себе задачу, вспомнив, что гравитационная постоянная и масса притягивающего центра при описании гравитационных явлений всегда встречаются в виде комбинации $\varkappa^2 = GM$ — так называемого «гравитационного параметра». Как несложно выяснить, его размерность (если пользоваться, например, единицами СИ) — это м^3/с^2, и поскольку по условию задачи фокусное расстояние должно быть обратно пропорционально массе, в выражение входит величина $1/\varkappa^2$, имеющая размерность с^2/м^3. Единственный способ с использованием доступных величин «избавиться» от секунд в квадрате в числителе — это умножить выражение на квадрат скорости света. Получится $c^2/\varkappa^2$, имеющее размерность 1/м. Но нам нужно расстояние, которое измеряется в метрах, поэтому остается единственный способ получить его — домножить выражение на R^2. Таким образом, искомое выражение должно иметь вид

$$F = K\,\frac{R^2c^2}{GM},$$

где K — некоторый безразмерный коэффициент. Найдем его, зная угол отклонения проходящих рядом с поверхностью Солнца лучей его гравитационным полем — это и есть те самые $\alpha = 1''.75$.

Построим очень схематичный рисунок:



и сделаем из него очевидный вывод: фокусное расстояние для Солнца, являющегося гравитационной линзой, равно $F_\odot = R_\odot/\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому коэффициент K можно выразить следующим образом:

$$K = \frac{GMF}{R^2c^2} = \frac{GM_\odot F_\odot}{R_\odot^2c^2} = \frac{GM_\odot}{R_\odot \operatorname{tg}\alpha \cdot c^2}.$$

Осталось вычислить его значение. Можно несколько упростить этот процесс, вспомнив, что величина

$$R_g = \frac{2GM}{c^2},$$

называемая радиусом Шварцшильда, для Солнца составляет примерно 3 км. Угол α очень мал, его тангенс с отличной точностью равен ему самому в радианах, поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1.75}{2.06\cdot 10^5} \approx \frac{6}{7}\cdot 10^{-5}.$$

Вспомнив, что радиус Солнца $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^5$ км, вычисляем итоговое значение

$$K = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 7 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^{-5}} = \frac{1}{4}.$$

Это и есть точный (несмотря на округления при вычислениях) ответ. Естественно, при решении задачи может получиться и другое, но близкое к 0.25 значение коэффициента.

Кстати, обычно искомую формулу записывают в виде

$$F = \frac{R^2}{2R_g},$$

но несложно убедиться, что она полностью эквивалентна найденному нами виду

$$F = \frac{R^2 c^2}{4GM}.$$

Комментарии к оцениванию:

В некоторых случаях участники знали искомую формулу как готовую (или знали выражение для угла отклонения, позволяющее быстро получить итоговый результат). Однако требовалось не записать готовый ответ, а обосновать его (хотя, конечно, не возбранялось записать ответ, а потом доказать, что он является именно таким). Как следствие, в решениях, содержащих только часть обоснования, именно она и оценивалась (а также выставлялись 2 балла за собственно правильный ответ).

Также систематической ошибкой было получение итоговой зависимости вида $F \propto R/M$ (линейной, а не квадратичной зависимости от радиуса). Такие решения при их идеальной реализации оценивались максимум 4 баллами.

П.А. Тараканов

3. У некоторой спиральной галактики линия H_{α} наблюдается на длине волны 7900 Å, причем ширина этой линии равна 16 Å. Оцените видимую звездную величину этой галактики.

Решение:

Для начала определим расстояние до галактики r. Лабораторная длина волны H_{α} $\lambda_0 = 6563$ Å, что можно либо помнить, либо вычислить, используя формулу Ридберга. Таким образом, красное смещение

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{7900 - 6563}{6563} \approx \frac{1340}{6560} \approx 0.2.$$

Отсюда вычисляем расстояние, используя закон Хаббла:

$$r = \frac{c \cdot z}{H_0} = \frac{3 \cdot 10^5 \cdot 0.2}{70} \approx 9 \cdot 10^2 \text{ Мпк}.$$

Теперь определим абсолютную звездную величину спиральной галактики M. Поскольку известно, что ширина линии $\Delta\lambda = 16$ Å, можно определить максимальную скорость вращения галактики

$$v = c\frac{\Delta\lambda/2}{\lambda} = 3 \cdot 10^5 \frac{16}{2 \cdot 7900} \approx 3 \cdot 10^2 \text{ км/с}.$$

Для спиральных галактик существует эмпирическое соотношение Талли-Фишера, утверждающее, что их светимость $L \propto v^4$. Максимальная скорость вращения Млечного

Пути близка $v_0 = 2.4 \cdot 10^2$ км/с. Если L — светимость наблюдаемой галактики, L_0 — светимость Млечного Пути, то из соотношения Талли-Фишера получаем

$$L = L_0 \left(\frac{v}{v_0}\right)^4 = L_0 \cdot \left(\frac{3}{2.4}\right)^4 \approx 2.5 L_0.$$

Абсолютная звёздная величина Млечного Пути $M_0 = -21^m$. Поэтому $M = -22^m$, поскольку далёкая галактика ярче нашей в 2.5 раза. Тогда видимая звёздная величина далёкой спиральной галактики

$$m = M - 5 \ + 5 \lg r = -27 + 5 \lg(9 \cdot 10^8) = 13 + 5 \lg 9 \ \approx 13 + 5 \ = 18^m.$$

Комментарии к оцениванию:

Красное смещение — 1 балл. Расстояние до галактики — 1 балл. Скорость вращения галактики — 2 балла. Светимость галактики — 1 балл. Абсолютная звёздная величина галактики — 2 балла. Итоговый ответ — 1 балл.

С.А.Русаков

4. Оцените период обращения Солнца вокруг своей оси, если на него упадет Юпитер. Можно считать, что при падении радиус орбиты меняется достаточно медленно, взаимодействия с другими телами не происходит, эволюцией Солнца можно пренебречь.

Решение:

В предположении, что Юпитер падает медленно, его мгновенная орбита близка к круговой. Также вспомним, что и Юпитер, и Солнце вращаются вокруг оси Солнца в одну сторону, так что при падении Юпитера разумно ожидать уменьшения периода обращения Солнца.

Запишем закон сохранения углового момента (он работает всегда, а закон сохранения механической энергии здесь не выполняется, т.к. слияние объектов — диссипативный процесс). Пусть I — момент инерции Солнца, P — его период вращения, M — его масса, m — масса Юпитера, v — его текущая круговая скорость, r — текущий радиус орбиты. Тогда в любой момент времени верно:

$$\frac{2\pi I}{P} + mvr = L = \text{const}.$$

Вращением Юпитера вокруг своей оси можно сразу пренебречь, т.к. его момент инерции в 10^5 раз меньше момента инерции вращения Солнца (масса меньше в 1000 раз, радиус — в 10 раз), а меньший период обращения вокруг своей оси (10 часов) в данном случае не сильно увеличивает соответствующее слагаемое. Понятно, что $v = \sqrt{G(M+m)/r}$, но лучше написать так: $v = 2\pi r/T$, где T — текущий период обращения Юпитера вокруг Солнца. Тогда:

$$\frac{2\pi I}{P} + m\frac{2\pi r^2}{T} = L.$$

Обозначим все введенные выше переменные величины для текущего момента индексом 0. Тогда константу L можно заменить:

$$\frac{2\pi I}{P} + \frac{2\pi m r^2}{T} = \frac{2\pi I}{P_0} + \frac{2\pi m r_0^2}{T_0}$$

При падении радиус орбиты Юпитера становится равным нулю (и период его обращения $T \sim r^{3/2}$ тоже, так что второе слагаемое слева зануляется). Момент инерции Солнца $I = \frac{2}{5} M R^2$ не меняется со временем (R — постоянный радиус Солнца, т.к. мы пренебрегаем эволюцией нашего светила, а изменением массы вследствие поглощения Юпитера мы также пренебрежем). Тогда:

$$\frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{P_0} + \frac{2\pi}{T_0} \times \frac{mr_0^2}{\frac{2}{5}MR^2} = \frac{2\pi}{P_0} + \frac{2\pi}{T_0} \times \frac{5}{2}\frac{m}{M}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2.$$

Из этой формулы становится очевидно, что в случае падения Юпитера на Солнце период обращения нашего светила вокруг оси уменьшится. Кроме того, интересно, что добавка определяется угловыми размерами Солнца для наблюдателя с Юпитера.

Вычислим множитель второго слагаемого справа, обозначив его за ξ:

$$\xi = \frac{5}{2}\frac{m}{M}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2 = 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{5}{1/200}\right)^2 = 2.5 \times 10^3.$$

Здесь мы учли, что Юпитера в 10^3 раз легче Солнца, а радиус Солнца равен 1/200 а.е.

Осталось выразить и посчитать итоговый период P:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_0} + \frac{\xi}{T_0} \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{P_0 T_0/\xi}{P_0 + T_0/\xi}$$

Период обращения Юпитера вокруг Солнца сейчас составляет $T_0 = 12$ лет, в году 365 суток, период обращения Солнца вокруг своей оси на экваторе равен $P_0 = 25$ суток. Итого:

$$T_0/\xi = \frac{12 \cdot 365}{5/2 \times 10^3} = 2 \cdot 12 \cdot 73 = 1.752 \text{ суток} \qquad \Rightarrow$$

$$P \approx \frac{25 \cdot 1.75}{25 + 1.75} = \frac{25 \cdot 7/4}{25 + 7/4} = \frac{25 \cdot 7}{100 + 7} = \frac{175}{107} \text{ суток} \approx 39 \text{ часов}.$$

Интересно отметить, что в случае падения Сатурна результат будет примерно таким же, так как несмотря на то, что его масса в три раза меньше массы Юпитера, он находится дальше в два раза (что в квадрате даст четверку), так что величина ξ для Сатурна будет примерно такой же.

Для полноты картины также оценим минимальный период обращения Солнца вокруг своей оси. Это можно сделать, найдя время обращения вокруг Солнца при радиусе орбиты, равном радиусу Солнца или вспомнить, что первая космическая скорость у поверхности Солнца равна 437 км/с. В любом случае получается 3×10^3 с, что гораздо меньше полученных в ответе 1.4×10^5 с, то есть при падении Юпитера на Солнце, оно останется целым. Скорее всего, подобный механизм и ответственен за то, что молодые звезды типа T Тельца могут вращаться с периодами порядка 3 суток (горячие юпитеры находятся рядом с ними или уже упали), а миграция Юпитера и Сатурна от Солнца в Солнечной системе заметно замедлила вращение нашего светила вокруг своей оси.

Комментарии к оцениванию:

Знание параметров Солнца (P_0, M, R) и Юпитера (r_0 или T_0, m) — 2 + 1 балла. Запись закона сохранения момента импульса — 2 балла. Преобразования и вычисления — 2 балла. Ответ, на порядок отличающийся от P_0 в меньшую сторону, но не менее 3×10^3 с — 1 балл.

В.В.Григорьев

5. *Насреддин (мудрецу):*

Готов ли ты — скажи определённо! —
Все звёзды в небесах пересчитать?

Мудрец (спокойно):

А что считать? Их триста миллионов
Шестьсот пятнадцать тысяч двести пять!

Насреддин (неприятно поражён):

Довольно точно. Знаешь, очень странно,
Но вовсе не такой уж ты дебил,
Как выглядишь...

Л. Филатов, «Возмутитель спокойствия»

Допустим, мудрец действительно наблюдает ровно 300 615 205 звезд. Постарайтесь и вы — насколько возможно точно — определить проницающую способность наблюдательного инструмента, используемого мудрецом. Будем считать, что он наблюдает только в оптическом диапазоне.

Решение:

Решим промежуточную задачу: выясним, как зависит количество наблюдаемых на небе звезд от предельной звездной величины.

Пусть функция $N(m)$ — это количество звезд на небесной сфере ярче звездной величины m. Предположим, что все звезды распределены в пространстве равномерно и имеют строго одну и ту же светимость. Освещенность, создаваемая звездой величины $m+1$, меньше освещенности, создаваемой звездой величины m, в $10^{2/5} \approx 2.512\ldots$ раза по определению понятия звездной величины. Поскольку все звезды по предположению имеют одинаковые светимости, то освещенности, создаваемые ими, обратно пропорциональны квадрату расстояния до них. Тогда предельные расстояния, на которых мы будем наблюдать звезды величин m и $m+1$ (обозначим их $r(m)$ и $r(m+1)$ соответственно), относятся как

$$\frac{r(m+1)}{r(m)} = 10^{1/5}.$$

Объемы шаров пропорциональны кубам радиусов и, так как звезды расположены в пространстве равномерно, получается, что

$$\frac{N(m+1)}{N(m)} = 10^{3/5} = \sqrt[5]{1000} \approx \sqrt[5]{1024} = 4.$$

Таким образом, можно сказать, что

$$N(m) = N(0) \cdot 4^m,$$

причем m в данном случае — показатель степени, а не индекс, обозначающий звездную величину.

Звезды имеют, разумеется, разную светимость. Однако на итоговый результат это никак не влияет. Мы можем разделить все звезды на много отдельных классов так, чтобы в пределах каждого класса светимость звезд была примерно одинаковой. Для каждого отдельного класса полученное выше выражение для $N(m)$ вполне пригодно, а затем мы просто сложим все получившиеся выражения. Результат окажется таким же по структуре, но пригодным для звезд различной светимости. Тем самым мы доказали утверждение, известное в астрономии как теорема Зеелигера: $N(m+1)/N(m) \approx 4$ (точнее 3.98, хотя для решения данной задачи это несущественно).

Если воспользоваться этим результатом и учесть, что до $+6^m$ на небе видно около $6 \cdot 10^3$ звезд, то проницающая способность m_1 инструмента мудреца, наблюдающего примерно $3 \cdot 10^8$ звезд (использовать это данное в более точном виде, очевидно, бессмысленно), можно найти из соотношения

$$\frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^3} = 4^{m_1 - 6} = 2^{2m_1 - 12}.$$

Проще всего буквально подбором найти степень 2, примерно равную $5 \cdot 10^4$ (поскольку $2^{10} \approx 10^3$, это несколько менее 16), откуда проницающая способность $m_1 \approx +14^m$.

Однако полученный результат можно было бы использовать в том случае, если бы наблюдаемое число звезд было сравнительно небольшим. Но мудрец наблюдает $3 \cdot 10^8$ звезд, что составляет порядка 10^{-3} всех звезд Галактики. Даже если предположить, что Галактика представляет собой диск, равномерно заполненный звездами, а в доступной для наблюдений области мудрец видит все звезды без исключения, то доступная для наблюдений область будет иметь размеры около $1/30$ диаметра диска, то есть не менее 0.5 кпк. В реальности же слабые звезды мудрец видит только вблизи, яркие — на существенно больших расстояниях (где большую роль играет межзвездное поглощение), да концентрация звезд к центру Галактики растет, поэтому предположения о равномерно заполненном звездами и полностью прозрачном пространстве в данном случае малопригодны. Попробуем как-нибудь от них избавиться.

Начнем со сравнительно простого предположения. Будем считать, что диск Галактики тонкий, и поэтому количество звезд, попадающих в область с радиусом r, растет пропорционально r^2, а не r^3 (для слабых звезд эта модель плоха, а вот для наиболее ярких окажется уже достаточно правдоподобной). Тогда отношение числа звезд до звездных величин $m+1$ и m примет вид

$$\frac{N(m+1)}{N(m)} = 10^{2/5} = \sqrt[5]{100} = 2.512\ldots \approx 2.5,$$

а предельную проницающую способность m_2 можно будет найти из соотношения

$$5 \cdot 10^4 = 2.5^{m_2-6}.$$

Поскольку $2.512^{10} = 10^4$, то выражение превращается в

$$5 = 2.5^{m_2-16},$$

откуда получаем, что $m_2 = 17^m \div 18^m$.

Второй вариант более сложный. Выведем аналог теоремы Зеелигера (для звезд одинаковой светимости и, как следствие, одинаковой абсолютной звездной величины M) с учетом существования поглощения, характеризуемого величиной A — увеличением видимой звездной величины на парсек. Если звезды с видимой звездной величиной m видны с расстояния r, а звезды с видимой звездной величиной $m+1$ — с расстояния $k\,r$, то верны соотношения:

$$\begin{cases} m = M + 5\lg r - 5 \ + A \cdot r \\ m+1 = M + 5\lg(k\,r) - 5 \ + A \cdot k\,r \end{cases}$$

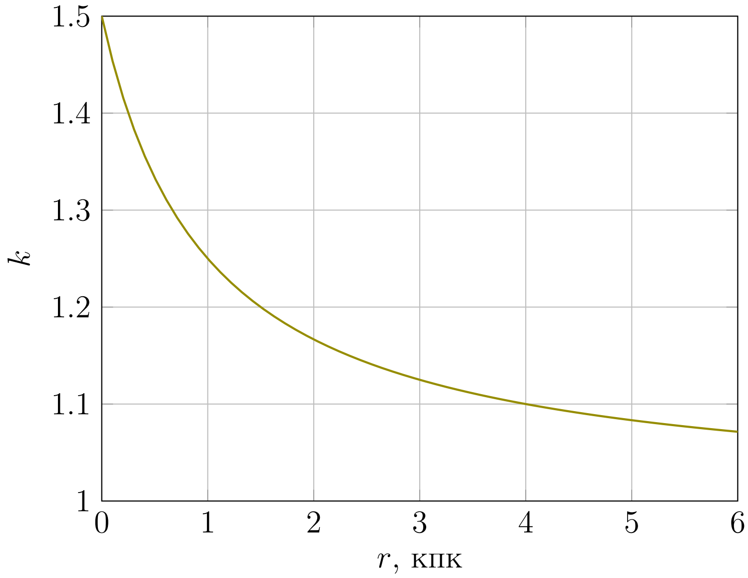
откуда

$$1 = 5 \ \lg k + A\,(k-1)\,r.$$

Считая, что коэффициент k не сильно отличается от единицы (что верно даже в отсутствие поглощения), введем обозначение $x = k - 1$ и преобразуем правую часть выражения:

$$5\lg k + A\,(k-1)\,r = 5 \ \lg(1+x) + A\,x\,r = 5 \ \cdot \frac{\ln(1+x)}{\ln 10} + A\,x\,r \approx \frac{5}{2.3} \cdot x + A\,x\,r \approx (2 + Ar)\,x.$$

Получаем, что для малых расстояний коэффициент $k \approx 1 + \frac{1}{2} = 1.5$ (и мы это уже знаем, точное значение $\sqrt[5]{10} \approx 1.58$), а для больших он должен убывать. Нас интересует в первую очередь межзвездное поглощение в диске Галактики, оно составляет около 2^m на кпк, поэтому $A = 2 \cdot 10^{-3}$, и зависимость коэффициента k от расстояния будет выглядеть примерно так:

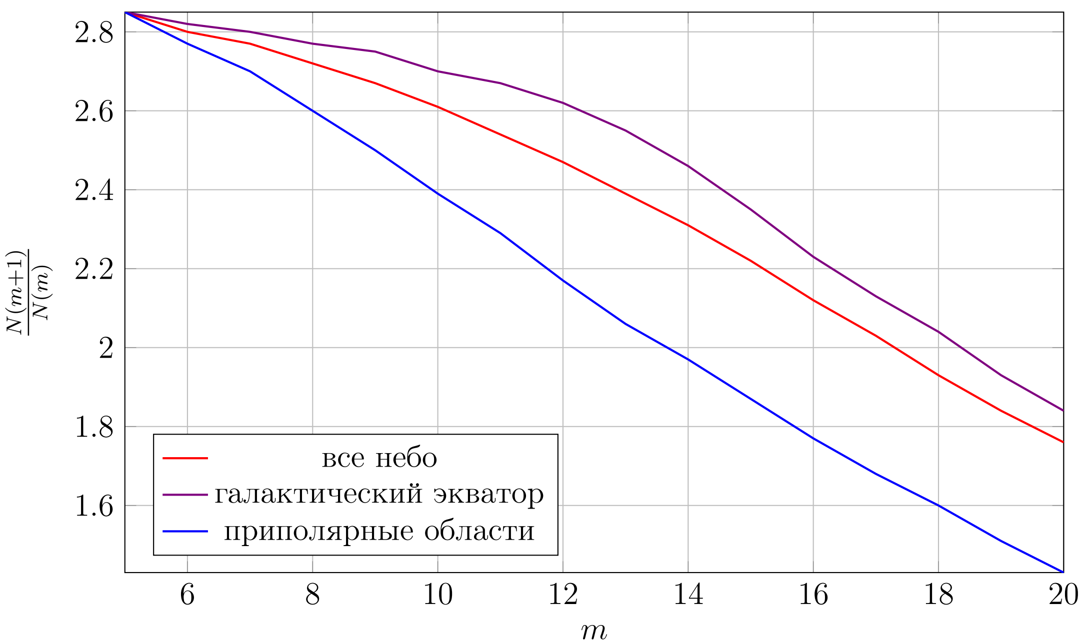


Коэффициент k быстро уменьшается, и если мы оценим размеры наблюдаемой области в 1 кпк и используем среднее значение коэффициента k для интервала $0 \leqslant r \leqslant 1$ кпк (удобно брать примерно 4/3), то, по аналогии с выводом теоремы Зеелигера возводя его в куб, получим, что

$$\frac{N(m+1)}{N(m)} \approx \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2.4.$$

Это близко к предыдущей оценке (даже чуть меньше, что приводит к увеличению ответа), поэтому можно счесть результаты обеих оценок примерно совпадающими и дающими итоговый результат — примерно $+18^m$.

Для полноты картины приведем реальные данные. Зависимость $N(m+1)/N(m)$ для Галактики в целом, а также отдельно для галактического экватора и приполярных областей неба выглядит так:



Численная обработка этих данных действительно дает $N(+18^m) \approx 3 \cdot 10^8$, так что, несмотря на приближения, мы получили правильный ответ.

Также интересно отметить, что тем самым мудрец получил действительно выдающийся научный результат: пронаблюдать все звезды ярче найденной нами границы действительно очень сложно. Примерно такой же фотометрической полнотой, и то по оптимистичным оценкам, обладает только каталог Gaia DR3, опубликованный летом 2022 года и последний на данный момент.

Комментарии к оцениванию:

Учет только теоремы Зеелигера (при полностью корректном выводе и правильном численном результате) — это половина задачи, которая оценивается максимум 4 баллами. Остальные 4 балла выставляются при учете межзвездного поглощения и неоднородности распределения звезд в Галактике (причем 1 балл выставлялся просто за попытку об этом задуматься, даже если она не дала никаких определенных результатов).

П.А. Тараканов