МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
3 (заключительный) этап, 24-27 марта 2009 г.

Решения задач первого дня

1 (М. Евдокимов, в редакции Л. Самойлова) *У реки живет племя Мумбо-Юмбо. Однажды со срочным известием в соседнее племя одновременно отправились молодой воин Мумбо и мудрый шаман Юмбо. Мумбо побежал со скоростью 11 км/ч к ближайшему хранилищу плотов, и затем поплыл на плоту в соседнее племя. А Юмбо, не торопясь, со скоростью 6 км/ч, пошел к другому хранилищу плотов и поплыл в соседнее племя оттуда. В итоге Юмбо приплыл раньше, чем Мумбо. Река прямолинейна, плоты плывут со скоростью течения. Эта скорость всюду одинакова и выражается целым числом км/ч, не меньшим 6. Каково наибольшее возможное её значение?*

Ответ: 26 км/ч. **Решение**. Обозначим место обитания племени Мумбо-Юмбо через O, хранилище, к которому побежал Мумбо, через M, а хранилище, к которому пошел Юмбо, через U. Очевидно, что M находится выше по течению, чем O, а U ниже. Пусть расстояния от O до M и U равны x и y км соответственно ($x < y$), скорость реки равна v км/ч. На путь от O до U Юмбо затратил $y/6$ часов, а Мумбо $x/11+(x+y)/v$ часов. Ясно, что в соседнее племя Юмбо приплывает раньше Мумбо тогда и только тогда, когда $y/6 < x/11+(x+y)/v$. Так как $x < y$, из этого неравенства следует, что $y/6 < y/11+(y+y)/v$. Сократив на y и преобразовав, получаем $v < 26.4$.

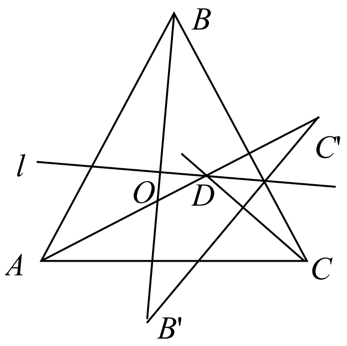
Осталось проверить, что скорость реки могла равняться 26 км/ч. Для этого в неравенстве $y/6 < x/11+(x+y)/v$ положим $v = 26$ и равносильно преобразуем его к виду $y/x < 111/110$. Последнее возможно (например, при $y = 1{,}12$ км, $x = 1{,}11$ км), что и завершает решение.

2. (А. Шаповалов) *При всяком ли натуральном n, большем 2009, из дробей* $\frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-2}, \ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}$ *можно выбрать две пары дробей с одинаковыми суммами?*

Ответ: Да. **Решение**. Каждая из данных дробей имеет вид $\frac{n+1-a}{a} = \frac{n+1}{a} - 1$, где $1 \le a \le n$. Стало быть, нам требуется найти такие различные натуральные числа a, b, c и d, не большие 2009, для которых $\left(\frac{n+1}{a}-1\right)+\left(\frac{n+1}{b}-1\right)=\left(\frac{n+1}{c}-1\right)+\left(\frac{n+1}{d}-1\right)$.

Убрав минус единицы и поделив затем на $n+1$, получим равносильное равенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. Осталось подобрать удовлетворяющие ему дроби. Это можно сделать, взяв любое равенство двух сумм различных натуральных слагаемых, НОК которых не больше 2009, и поделив его на этот НОК. Например, равенство 1+4 = 2+3, поделенное на 12, даёт $\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$.

3. (С. Берлов) *В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D внутри треугольника такова, что угол ADC вдвое больше угла ABC. Докажите, что удвоенное расстояние от точки B до прямой, делящей пополам углы, смежные с углом ADC, равно $AD+DC$.*



Решение. Пусть l — биссектриса углов, смежных с углом ADC, точка K — проекция B на l, а точки B' и C' симметричны соответственно точкам A, B и C относительно l. Тогда $BB' = 2BK$ — как раз удвоенное расстояние от B до l. Кроме того, точка D лежит на отрезке AC' (так как прямые DA и DC симметричны относительно l), и $AC' = AD+DC' = AD+DC$. Далее, из той же симметрии получаем $\angle AC'B' = \angle DC'B' = \angle DCB$, $\angle BB'C' = \angle B'BC$. Пусть отрезки BB' и AC' пересекаются в точке O. Из прямоугольного треугольника OKD получаем

$$\angle BOC' = \angle KOD = 90° - \angle ODK = (180° - \angle CDC')/2 = \angle ADC/2 = \angle ABC.$$

Значит,

$$\angle ABB' = \angle ABC - \angle B'BC = \angle BOC' - \angle OB'C = \angle OC'B'.$$

Аналогично,

$$\angle BAO = \angle BOC' - \angle ABO = \angle ABC - \angle ABO = \angle B'BC = \angle BB'C'.$$

Таким образом, треугольники ABO и $B'C'O$ равны по стороне и двум прилежащим углам. Отсюда $BB' = BO+OB' = C'O+OA = AC' = AD+DC$, что и требовалось.

4. (Н. Гравин) *В стране Леонардии все дороги — с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Департамент статистики вычислил для каждого города суммарное число жителей в городах, откуда в него ведут дороги, и суммарное число жителей в городах, куда ведут дороги из него. Докажите, что хотя бы для одного города первое число оказалось не меньше второго.*

Первое решение. Построим граф, вершины которого соответствуют жителям страны, причём две вершины соединены направленным ребром в том и только том случае, когда их города соединены дорогой (направление на ребре будет такое же, как на дороге между городами). Для каждой вершины v этого графа обозначим через $f(v)$ количество рёбер, входящих в v, минус количество рёбер, выходящих из v. Сумма $f(v)$ по всем вершинам графа равна 0, так как каждое ребро вносит в нее одну +1 и одну –1. Значит, найдется такая вершина u, что $f(u) \geq 0$. Остается отметить, что $f(u)$ в точности равно разности первого и второго чисел для города, в котором живет u.

Второе решение. Пусть $n(A)$ — число жителей города A, а $f(A)$ — суммарное население городов, дороги из которых входят в A, минус суммарное население городов, в которые выходят дороги из A. Если утверждение задачи неверно, то $f(A) < 0$ для каждого города A. Тогда сумма S чисел $n(A)f(A)$ по всем городам страны отрицательна. С другой стороны, рассмотрим любую дорогу из A в B. В число $n(B)f(B)$ эта дорога «вносит вклад» $+n(B)n(A)$, а в число $n(A)f(A)$ — «вклад» $-n(A)n(B)$. Рассмотрев все дороги, получим, что $S = 0$. Противоречие.

Замечание. Отметим, что во втором решении мы использовали лишь тот факт, что «количество жителей города» положительно. Чтобы оно было целым, не требуется.